Vollkommene quadratische Formen über reell-quadratischen Zahlkörpern

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung des Doktorgrades

der Naturwissenschaften

vorgelegt beim Fachbereich Mathematik

der Johann Wolfgang Goethe-Universität

zu Frankfurt am Main

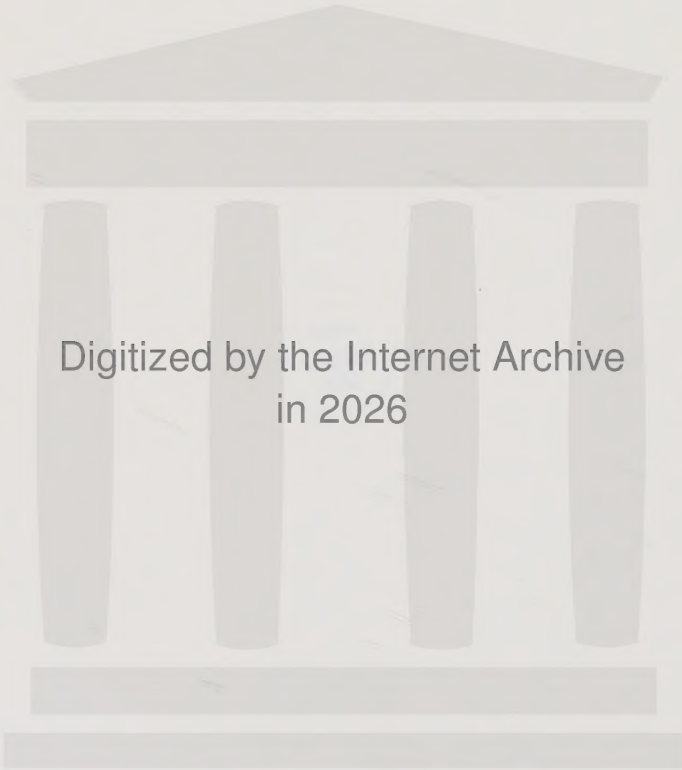
von

Heidrun Ong

aus Heilbronn

Frankfurt am Main, 1983

UNIV.
LONDON
MED.


Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41523704_0022

Vollkommene quadratische Formen über reell-quadratischen Zahlkörpern

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung des Doktorgrades

der Naturwissenschaften

vorgelegt beim Fachbereich Mathematik

der Johann Wolfgang Goethe-Universität

zu Frankfurt am Main

von

Heidrun Ong

aus Heilbronn

Frankfurt am Main, 1983

Gedruckt mit Genehmigung des Fachbereichs Mathematik
der Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt am Main

Dekan: Prof. Dr. J. Bliedtner

Erster Gutachter: Prof. Dr. H. Behr

Zweiter Gutachter: Prof. Dr. J. Wolfart

Tag der Promotion: 21. Dezember 1983

Einleitung

Nachdem H.Ch. Hermite [9] Mitte des vergangenen Jahrhunderts gefunden hatte, daß jede positiv definite quadratische Form $q(\underline{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} q_{ij}x_ix_j$, $q_{ij}=q_{ji} \in \mathbb{R}$, mit der Determinante D der Matrix $[q_{ij}]$ und Minimum M (für $\underline{0} \neq \underline{x} \in \mathbb{Z}^n$), die Ungleichung $M \leq (\frac{4}{3})^{\frac{n-1}{2}} \sqrt[n]{D}$ erfüllt, war man in der darauffolgenden Zeit daran interessiert, diejenigen Formen zu bestimmen, für welche der Quotient $\frac{M}{\sqrt[n]{D}}$ auf der Menge $Y_{\mathbb{R}}^{(n)}$ aller positiv definiten Formen in n Variablen ein lokales Maximum darstellt. Solche Formen heißen extrem.

A. Korkine und G. Zolotareff [12$_{1,2}$] gaben für jede Variablenzahl n extreme Formen an, zeigten, daß die Eigenschaft "extrem" invariant ist gegenüber unimodularer Transformation und bestimmten bis n = 5 jeweils ein vollständiges Repräsentantensystem für die Äquivalenzklassen extremer Formen. Sie stellten außerdem in ihren Arbeiten fest, daß jede extreme Form eindeutig durch ihr Minimum und die zugehörigen Minimalvektoren bestimmt ist. Diese Eigenschaft extremer Formen veranlaßte G. Voronoi [16] zu einer umfangreichen Arbeit über vollkommene Formen.

Voronoi beobachtete, daß es (erstmals bei n = 6) nichtextreme Formen gibt, die ebenfalls eindeutig durch Minimum und Minimalvektoren bestimmt sind, und er nannte jede positiv definite Form, die eindeutig durch Minimum und Minimalvektoren bestimmt ist, vollkommen. Voronoi bewies, daß

- jede zu einer vollkommenen Form äquivalente Form voll-

Univ. Köln Math.

kommen ist,

- die Zahl der Äquivalenzklassen vollkommener Formen modulo skalarer Multiplikation durch $\mathbb{R}^{>0}$ bei gegebenem n endlich ist und
- eine positiv definite Form genau dann die Eigenschaft "extrem" besitzt, wenn sie vollkommen und eutaktisch*) ist.

Die von ihm entwickelte Methode zur Bestimmung vollkommener Formen wurde aufgrund dieser Ergebnisse bis in die jüngste Vergangenheit dazu verwendet, extreme Formen zu klassifizieren, d.h. bei gegebenem n ein Repräsentantensystem für die Klassen anzugeben. Extreme Formen spielen vor allem in der Gittertheorie der Geometrie der Zahlen eine Rolle, da die absolut extremen Formen (zugehöriger Quotient $\frac{M}{\sqrt[n]{D}}$ gleich dem absoluten Maximum) dichteste gitterförmige Kugelpackungen im $\mathbb{R}^n$ repräsentieren.
Weitere Methoden zur Bestimmung vollkommener bzw. extremer Formen stammen von H.S.M. Coxeter [4] und E.S. Barnes [1].

Neben ihrer Bedeutung für die Gittertheorie kommt den vollkommenen Formen ein besonderes Interesse im Rahmen der Reduktionstheorie quadratischer Formen und der Gruppentheorie zu.
Die Reduktionstheorie ist bekanntlich aus dem Klassifi-

---

*) $q \in Y_{\mathbb{R}}^{(n)}$ heißt eutaktisch, wenn sich die Form q^{-1}, d.h. die Form mit der Koeffizientenmatrix $[q_{ij}]^{-1}$, wie folgt darstellen läßt: $q^{-1} = \sum_{k=1}^{s} r_k \ell_k^2$, $\ell_k = \sum_{i=1}^{n} m_{ik} x_i$, $\underline{m}_k$, $k = 1,\ldots,s$, die Minimalvektoren von q und $r_k \in \mathbb{R}^{>0}$.

kationsproblem quadratischer Formen entstanden und geht vor allem auf H. Minkowski [13], aber auch - was weniger bekannt ist - auf G. Voronoi [16] zurück. Ihre Arbeiten enthalten eine Charakterisierung "einfacher" Repräsentanten für die Äquivalenzklassen; anhand dieser Formen - die reduziert heißen - kann die Frage nach der Äquivalenz zweier Formen beantwortet werden. Grundlage ist jeweils eine geometrische Betrachtungsweise:
eine quadratische Form $q = \sum_{i,j=1}^{n} q_{ij}x_ix_j$ wird durch den Punkt $(q_{ij})_{i\leq j}$ im $\mathbb{R}^N$, $N = \frac{n(n+1)}{2}$, repräsentiert.
Die Minkowski'schen Reduktionsbedingungen positiv definiter Formen sind nach Definition unendlich viele homogene lineare Ungleichungen in den Koeffizienten der Formen, die sich jedoch auf endlich viele zurückführen lassen. Dadurch stellt die Menge P_{red} der positiv definiten reduzierten Formen einen Polyeder-Kegel dar, d.h. einen Kegel, der begrenzt ist durch eine endliche Zahl von Hyperebenen. Die Menge der Transformierten $T^tP_{red}T$, $T \in GL(n,\mathbb{Z})$, bildet eine einfache und lückenlose Zerlegung des N-dimensionalen Kegels $Y_{\mathbb{R}}^{(n)}$, und man erhält aus P_{red} unmittelbar einen Fundamentalbereich für die Gruppe $GL(n,\mathbb{Z})$.

Etwas allgemeiner faßt Voronoi die Aufgabe der Reduktion, indem er $Y_{\mathbb{R}}^{(n)}$ in endlich viele Klassen bezüglich $GL(n,\mathbb{Z})$ äquivalenter Gebiete zerlegt. Hiervon betrachtet er ein Repräsentantensystem und nennt eine positiv definite Form reduziert, wenn sie einem der Gebiete aus dem Repräsentantensystem angehört. Voronoi's Reduktion beruht ebenfalls auf einer Zerlegung von $Y_{\mathbb{R}}^{(n)}$ durch Polyeder-Kegel, die nach

geeigneter Berandung von $Y_{\mathbb{R}}^{(n)}$ simplizial ist. Wir nennen diese Kegel vollkommene Polyeder-Kegel, da sie erzeugt sind durch vollkommene Formen.
Um bei gegebener Variablenzahl eine solche Zerlegung durchführen zu können, ist die Kenntnis einer vollkommenen Form notwendig. Von dieser ausgehend können - sofern existierend - Repräsentanten weiterer Klassen vollkommener Formen bestimmt werden, die dann Repräsentanten von Klassen äquivalenter vollkommener Poleder-Kegel erzeugen.
Einige Zusammenhänge zwischen der Minkowski'schen und der Voronoi'schen Reduktionstheorie, und zwar einen Fundamentalbereich für die Gruppe $GL(n,\mathbb{Z})$ betreffend, findet man in einer Arbeit von M. Koecher [11]. Außerdem besteht eine Beziehung darin, daß jede extreme (reduzierte) Form Kantenform des Minkowski'schen Polyeder-Kegels P_{red} ist.
Daraus folgt zum Beispiel daß die für n = 2 einzige Klasse vollkommener Formen dem elliptischen Fixpunkt dritter Ordnung der Modulgruppe entspricht (siehe I.2).

Gegenstand dieser Arbeit ist es nun, zunächst eine Methode zu finden, um vollkommene quadratische Formen über reellquadratischen Zahlkörpern $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ (d größer 1, ganzrational und quadratfrei) bestimmen zu können. Diese Formen sind in der Literatur bisher nicht bekannt. In [15] sind für n = 2 und n = 3 die vollkommenen Formen über $\mathbb{Z}[i]$ angegeben.
Ausgehend von Koecher's [11] Übertragung der Voronoi'schen Reduktionstheorie auf positiv definite Formen über algebra-

ischen Zahlkörpern (zur Beschreibung eines Fundamentalbereichs für die Gruppe GL(n,$\mathcal{O}$), $\mathcal{O}$ der Ring der ganzen Zahlen eines algebraischen Zahlkörpers) und Voronoi's [16] Algorithmus zur Bestimmung vollkommener Formen mit rationalen Koeffizienten wird in Teil III dieser Arbeit eine Methode zur Bestimmung und Klassifikation vollkommener Formen über den Körpern $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ dargestellt.
Dabei ist die Kenntnis einer vollkommenen Form, die als Ausgangsform dient, notwendig. Eine solche ist für die Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, d = 2,3,5, durch folgenden Satz gegeben:

Satz: e sei die Grundeinheit von $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, d = 2,3,5.

i) Ist d = 2 oder d = 5, so ist die quadratische Form

$$\phi_o(\underline{x}) = e\sqrt{d}\ \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \ + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} x_i x_j\Big) \quad \text{vollkommen.}$$

ii) Ist d = 3, so ist die quadratische Form

$$\phi_o(\underline{x}) = e\ \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \ + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} x_i x_j\Big) \quad \text{vollkommen.}$$

Es zeigt sich, daß die Klassifikation vollkommener Formen über $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ selbst für kleine Variablenzahlen erheblich schwieriger ist als diejenige vollkommener Formen über $\mathbb{Q}$. Eine Ursache liegt in der im allgemeinen sehr viel größeren Differenz aus der Zahl der Minimalvektoren einer über $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ vollkommenen Form und der Dimension des Raumes der über $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ positiv definiten Formen, welcher unter Einbeziehung der konjugierten Formen definiert wird. Diese Schwierigkeit zu überwinden, hilft ein eigens dazu entwickelter Computer-

Algorithmus, der diesbezüglich für jeden reell-quadratischen Zahlkörper $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ anwendbar ist.

Ziel dieser Arbeit ist es, die Klassifikation binärer vollkommener Formen über den Körpern $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, $d = 2,3,5$, durchzuführen. Mit Hilfe des Computer-Algorithmus - implementiert auf der Rechenanlage DEC 1091 des Rechenzentrums der Universität Frankfurt - erhalten wir bei jeweils vorgegebenem Minimum der Formen folgendes Ergebnis:

Es existieren über $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ genau 2 Klassen,
über $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ genau 3 Klassen und
über $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ genau 2 Klassen
binärer vollkommener quadratischer Formen.

Ein jeweiliges Repräsentantensystem ist in Teil IV dieser Ausführungen angegeben.

Naheliegend ist die Frage: besteht eine Beziehung zwischen vollkommenen binären Formen über $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ und elliptischen Fixpunkten der zu diesen Körpern gehörenden Hilbert'schen Modulgruppen Γ?
Hierbei sind gerade die Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, $d = 2,3,5$, von besonderem Interesse, da Γ bezüglich dieser Körper Ausnahmefixpunkte, d.h. elliptische Fixpunkte der Ordnung größer drei besitzt. In Teil IV dieser Arbeit wird gezeigt, daß zwar nicht jede über $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ vollkommene binäre Form einem elliptischen Fixpunkt von Γ entspricht, jedoch umgekehrt die elliptischen Fixpunkte dritter Ordnung und sämtliche Ausnahmefixpunkte von Γ jeweils einer vollkommenen binären

Form zugeordnet sind.

Herrn Professor Dr. H. Behr möchte ich sehr herzlich danken für die Anregung zu dieser Arbeit und für wertvolle Ratschläge während ihrer Durchführung.

Mein Dank gilt ebenfalls Herrn Professor Dr. J. Wolfart. Auch er war immer bereit, mit mir über Fragen im Zusammenhang mit dieser Arbeit zu sprechen und Anregungen zu geben.

Herrn Professor Dr. R. Bieri danke ich für wohlwollende Unterstützung.

Inhaltsverzeichnis

I. Vollkommene quadratische Formen mit rationalen Koeffizienten

1. Vollkommene Polyeder-Kegel 1

2. Zur Geometrie der binären vollkommenen Formen 5

II. Positiv definite quadratische Formen über reell-quadratischen Zahlkörpern

1. Grundlagen 9

2. Binäre Formen und deren Automorphismen 11

III. Bestimmung vollkommener quadratischer Formen über reell-quadratischen Zahlkörpern

1. Die Methode 15

2. Eine über $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, $d = 2,3,5$, vollkommene Form 27

3. Ein Computer-Algorithmus 32

IV. Binäre vollkommene quadratische Formen über $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, $d = 2,3,5$, und elliptische Fixpunkte der Hilbert'schen Modulgruppe

1. Die Formen ϕ_0 und ϕ_I über $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 42

2. Die Formen ϕ_0, ϕ_I und ϕ_{II} über $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ 52

3. Die Formen ϕ_0 und ϕ_I über $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ 67

Literaturverzeichnis 78

Lebenslauf

I. Vollkommene quadratische Formen mit rationalen Koeffizienten

1. Vollkommene Polyeder-Kegel

Wir fassen die für uns interessanten Überlegungen aus [16] zusammen und betrachten dazu folgende Formen

$$q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad \underline{x} \mapsto \sum_{i,j=1}^{n} q_{ij} x_i x_j, \quad q_{ij} \in \mathbb{R}, \ \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} .$$

Im allgemeinen werden wir nicht zwischen einer Form q und zugehöriger symmetrischer Matrix $[q_{ij}] \in M(n,\mathbb{R})$ unterscheiden.

Es sei $X_{\mathbb{R}}^{(n)} = \{q = [q_{ij}] \in M(n,\mathbb{R});\ [q_{ij}] = [q_{ij}]^t\}$,

$Y_{\mathbb{R}}^{(n)} = \{q \in X_{\mathbb{R}}^{(n)};$ q positiv definit$\}$ und

$\bar{Y}_{\mathbb{R}}^{(n)} = \{q \in X_{\mathbb{R}}^{(n)};$ q positiv semidefinit$\}$.

Die Gruppe $GL(n,\mathbb{R})$ operiert auf $X_{\mathbb{R}}^{(n)}$ durch Transformation $T: q \mapsto T^t q\, T$; insbesondere operiert so die Gruppe $GL(n,\mathbb{Z})$ auf $Y_{\mathbb{R}}^{(n)}$ und induziert eine Äquivalenzrelation $\sim$.

Für $q \in Y_{\mathbb{R}}^{(n)}$ sei

$\mu(q) := \min \{\underline{m}^t q\, \underline{m};\ \underline{m} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{\underline{0}\}\}$, das Minimum von q und

$M(q) := \{\underline{m} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{\underline{0}\};\ \underline{m}^t q\, \underline{m} = \mu(q)\}$, die Menge der Minimalvektoren von q.

Die Anzahl der Minimalvektoren von q ist endlich.

1.1 Definition: $q \in Y_{\mathbb{R}}^{(n)}$ heißt vollkommen, wenn für $u = [u_{ij}] \in X_{\mathbb{R}}^{(n)}$, u_{ij} unbestimmt, das Gleichungssystem

$\underline{m}^t u\, \underline{m} = \mu(q)$, $\underline{m} \in M(q)$, die eindeutige Lösung $u = q$ ergibt.

1.2 Bemerkungen:

Es sei v vollkommen und $M(v) = \{\underline{m}_k\}_{k=1,\ldots,s}$.

Aufgrund obiger Definition gilt:

1) $s \geq N$;
2) die Koeffizienten von v können als rationale Zahlen angenommen werden;
3) da mit v auch rv, $r \in \mathbb{R}^{>0}$, vollkommen ist und $M(v)$ mit $M(rv)$ übereinstimmt, wird v mit rv identifiziert.

Man bildet die zu v gehörenden Minimal-Linearformen

$$\ell_k: \quad \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad \underline{x} \to \sum_{i=1}^{n} m_{ik} x_i, \; k = 1,\ldots,s, \; \underline{m}_k \in M(v)$$

und daraus die positiv semidefiniten Formen

$$\ell_k^2 = \sum_{i,j=1}^{n} m_{ik} m_{jk} x_i x_j, \; k = 1,\ldots,s.$$

Wir nennen $P_v = \{q \in \bar{Y}_{\mathbb{R}}^{(n)};\; q(\underline{x}) = \sum_{k=1}^{s} r_k \ell_k^2,\; r_k \in \mathbb{R}^{\geq 0}\}$ den von v erzeugten vollkommenen Polyeder-Kegel.

1.3 Bemerkungen:

1) P_v läßt sich auch beschreiben als die Menge der Punkte $q = (q_{11},\ldots,q_{nn},q_{12},\ldots,q_{1n},q_{23},\ldots,q_{n-1n}) = (q_{ij})_{i\leq j} \in \mathbb{R}^N$, welche eine gewisse Anzahl homogener

linearer Ungleichungen erfüllen:

$$P_v = \{q \in \mathbb{R}^N;\ \psi_l(q) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{(l)} q_{ij} \geq 0,\ a_{ij} \in \mathbb{R},\ l = 1,\ldots,u\}.$$

2) Es ist die Dimension von P_v gleich N. P_v ist bestimmt durch die u Hyperebenen H_l: $\psi_l(q) = 0$, d.h. P_v ist begrenzt durch die (N-1)-dimensionalen Wände $W_l := H_l \cap P_v$ und besitzt die s 1-dimensionalen Kanten $\mathbb{R}^{\geq 0} \cdot \ell_k^2$.

3) Zu jeder Wand W von P_v gehört ein eindeutig bestimmter vollkommener Polyeder-Kegel $P_{v'}$, ($v' \neq r\,v$, $r \in \mathbb{R}^{>0}$), sodaß W gemeinsame Wand von P_v und $P_{v'}$ ist.

P_v und $P_{v'}$ heißen Nachbarkegel entlang W - oder kurz benachbart und die sie erzeugenden Formen v und v' Nachbarformen.

P_v und $P_{v'}$ heißen äquivalent, wenn dies für die Formen v und v' gilt.

Zwischen Nachbarformen besteht eine einfache Beziehung: Ist W bestimmt durch $\psi(q) = \sum_{i \leq j} a_{ij} q_{ij} = 0$, so bildet man die quadratische Form

$$\psi(\underline{x}) = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \leq j}}^{n} a_{ij} x_i x_j.$$

Die Nachbarform v' von v ist dann gegeben durch die Gleichung

$$v'(\underline{x}) = v(\underline{x}) + \delta\,\psi(\underline{x}),$$

wobei $\delta \in \mathbb{Q}^{>0}$ eindeutig bestimmt ist.

Ein Repräsentantensystem für die Klassen vollkommener

Formen erhält man wie folgt:

Ausgehend von einer beliebigen vollkommenen Form v_0 und ihrem Kegel P_{v_0} werden die Nachbarkegel $P_{v_1}, P_{v_2}, \ldots, P_{v_\kappa}$ von P_{v_0} bestimmt. Dies ist eine endliche Menge S von vollkommenen Polyeder-Kegeln, da die Zahl der Wände von P_{v_0} endlich ist. Man behält von S jedoch nur die paarweise untereinander und zu P_{v_0} nicht-äquivalenten Kegel. Zu den so verbliebenen Kegeln aus S bestimmt man wiederum alle Nachbarkegel und verwirft alle diejenigen, die äquivalent sind zu bereits gefundenen, usw..

Da die Zahl der Klassen vollkommener Formen endlich ist, ist es auch die Zahl der sie repräsentierenden Kegel. Man kommt also schließlich zu einer Menge Σ von vollkommenen Polyeder-Kegeln mit der Eigenschaft, daß sämtliche Kegel aus Σ untereinander nicht-äquivalent sind, und sämtliche diesen Kegeln aus Σ benachbarten Kegel äquivalent sind zu einem Kegel aus Σ .

Σ ist dann Repräsentantensystem für die Klassen äquivalenter Kegel, und die sie erzeugenden Formen bilden ein Repräsentantensystem für die Klassen vollkommener Formen. Sind insbesondere alle Kegel aus S äquivalent zum Ausgangskegel P_{v_0} - wie dies für $n = 2$ und $n = 3$ der Fall ist -, so existiert nur eine Klasse vollkommener Formen.

2. Zur Geometrie der binären vollkommenen Formen

Eine quadratische Form $q = [q_{ij}] \in X_{\mathbb{R}}^{(2)}$ ist genau dann positiv definit, wenn $q_{11} > 0$ und die Determinante $\det [q_{ij}] > 0$ sind.

Setzt man

$$(1) \qquad \eta = \frac{2q_{12}}{q_{22} + q_{11}} \quad \text{und} \quad \lambda = \frac{q_{22} - q_{11}}{q_{22} + q_{11}},$$

dann hat die Eigenschaft "positiv definit" von q die Relation $\eta^2 + \lambda^2 < 1$ zur Folge, und der 3-dimensionale Kegel $Y_{\mathbb{R}}^{(2)}$ der Formen (q_{11}, q_{22}, q_{12}) wird homöomorph auf das Innere des Einheitskreises (mit den rechtwinkligen Koordinaten η, λ) abgebildet. (Vgl. [2] , Kap. 12.6)

Es sei $v_0 = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$, d.h. $v_0 = (2,2,1)$.
v_0 ist vollkommen und $M(v_0) = \{ \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} \}$.

Unter dem obigen Homöomorphismus wird der Kegel P_{v_0} durch das Dreieck ABC (Figur 1) dargestellt; P_{v_0} hat die Nachbarkegel P_{v_1} (= Δ CDA), P_{v_2} (= Δ AEB) und P_{v_3} (= Δ BFC). Durch Unterteilung von P_{v_0} nach dem Baryzentrum (:= Summe der Kantenformen ℓ_k^2, k = 1,2,3) (2,2,-1) erhält man in dem Dreieck IGC einen Fundamentalbereich für die Gruppe GL(2,ℤ).

Die Minkowski'schen Reduktionsbedingungen für binäre positive Formen lauten:

$$q_{11} + 2q_{12} \geq 0$$
$$q_{11} - 2q_{12} \geq 0$$
$$q_{22} - q_{11} \geq 0 .$$

Durch obige Festsetzung (1) werden diese Ungleichungen zu

$$\begin{aligned} 2\eta + \lambda &\geq 1 \\ -2\eta + \lambda &\geq 1 \\ \lambda &\geq 0 \,. \end{aligned}$$

Letztere bestimmen das Dreieck HGC, dessen Eckpunkte G und H die beiden bezüglich der Modulgruppe $PSL(2,\mathbb{Z})$ äquivalenten vollkommenen Formen $(2,2,\pm 1)$ repräsentieren. Beim Übergang vom Klein'schen zum Poincaré'schen Modell der ebenen hyperbolischen Geometrie wird dieses Dreieck bijektiv in den Fundamentalbereich F der Modulgruppe abgebildet (Figur 2).
(Sollen dabei keine bezüglich $PSL(2,\mathbb{Z})$ äquivalenten Punkte vorkommen, so sind aus F entsprechende Randpunkte zu entfernen.)

Es sei $H = \{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Im}(z) > 0\}$, $\tau \in H$ und $r \in \mathbb{R}^{>0}$. Wir bilden die positiv definite quadratische Form

$$\begin{aligned} q(\underline{x}) &= r(x_1 + \tau x_2)(x_1 + \dot{\tau} x_2) \\ &= r(x_1^2 + (\tau + \dot{\tau})x_1x_2 + \tau\dot{\tau}x_2^2) \qquad (2) \end{aligned}$$

($\dot{\tau}$ sei die zu τ komplex-konjugierte Zahl)

und nennen q <u>die zu τ gehörende quadratische Form</u>.

Gilt $\tau = \dfrac{a\tau' + b}{c\tau' + d}$, $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in PSL(2,\mathbb{Z})$, d.h. sind τ und τ' bezüglich $PSL(2,\mathbb{Z})$ äquivalente Punkte, so erhält man aus (2)

$$\frac{r((c\tau' + d)x_1 + (a\tau' + b)x_2)(c\dot{\tau}' + d)x_1 + (a\dot{\tau}' + b)x_2)}{|c\tau' + d|^2}$$

$$= \frac{r(X_1 + \tau' X_2)(X_1 + \dot{\tau}' X_2)}{|c\tau' + d|^2} \qquad (3)$$

mit $X_1 = dx_1 + bx_2$ und $X_2 = cx_1 + ax_2$.

Die Formen (2) und (3) sind damit äquivalent:

$$(r, r\tau\dot{\tau}, \tfrac{r}{2}(\tau + \dot{\tau})) \sim$$

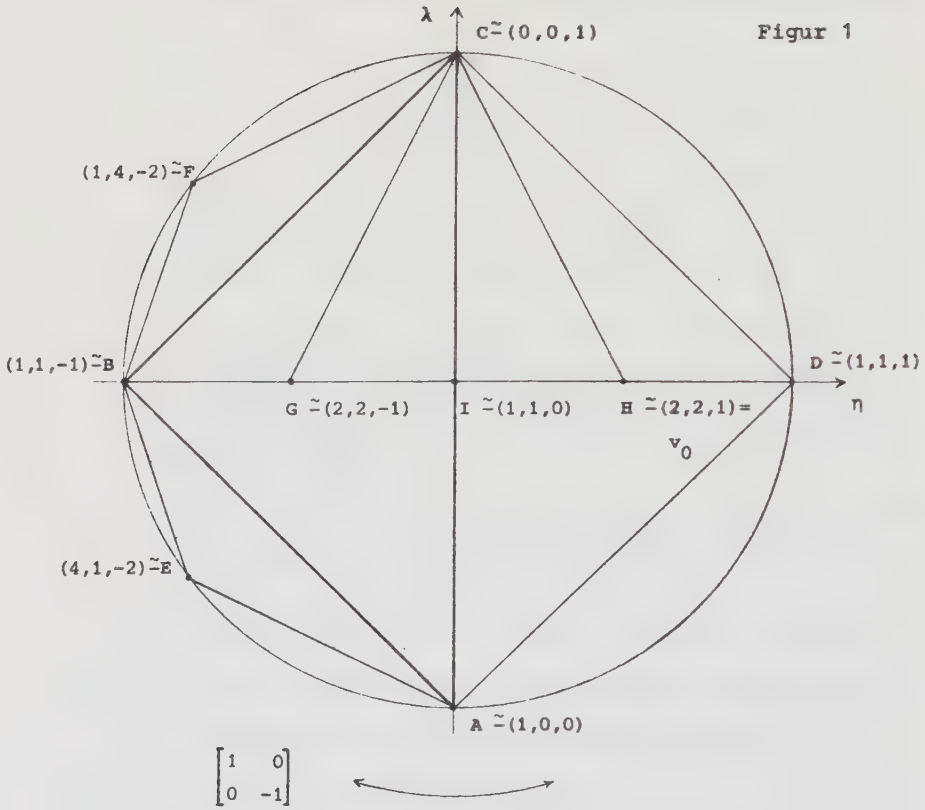
$$\left(\frac{r}{|c\tau' + d|^2}, \frac{r(\tau'\dot{\tau}')}{|c\tau' + d|^2}, \frac{r(\tau' + \dot{\tau}')}{2|c\tau' + d|^2}\right) \qquad (4).$$

Geht man von einer beliebigen Form $q = (q_{11}, q_{22}, q_{12}) \in Y_{\mathbb{R}}^{(2)}$ aus, so erhält man durch Vergleich mit der linken Seite von (4)

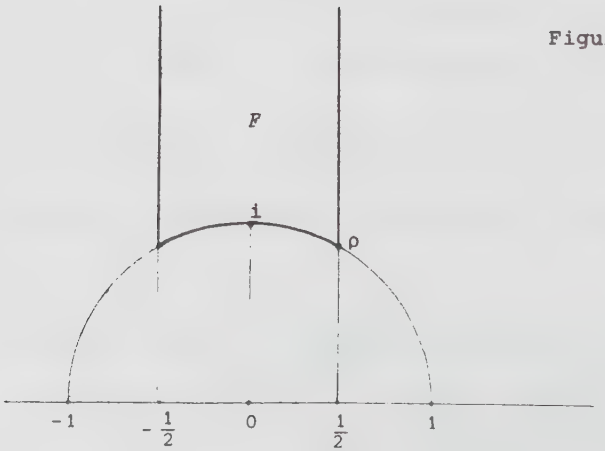
$$r = q_{11} \quad \text{und} \quad \tau = \frac{q_{12} + \sqrt{q_{12}^2 - q_{11}q_{22}}}{q_{11}} .$$

Man nennt τ <u>die Wurzel von q</u>.

Bekanntlich heißt ein Punkt $\tau \in H$ elliptischer Fixpunkt der Ordnung c von PSL(2,ℤ), wenn τ Fixpunkt einer elliptischen Transformation von PSL(2,ℤ) der Ordnung c ist. PSL(2,ℤ) hat genau die nicht-äquivalenten Fixpunkte i und $\rho = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}$ der Ordnung zwei bzw. drei, und eine einfache Rechnung zeigt, daß die vollkommene Form $v_0 = (2,2,1)$ die Wurzel ρ besitzt.



Figur 1



Figur 2

II. Positiv definite quadratische Formen über reell-quadratischen Zahlkörpern

1. Grundlagen

(Man vergleiche [11], §9)

Es sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$. Für $Q = [q_{ij}] \in M(n,K)$ bezeichne $\overline{Q}$ die Matrix, deren Elemente $\overline{q}_{ij}$ die bezüglich des nicht-trivialen Automorphismus $\sqrt{d} \to -\sqrt{d}$ von $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ zu q_{ij} konjugierten Elemente sind.

Wir bilden die Matrix

$$\hat{Q} = [\hat{q}_{ij}] = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & \overline{Q} \end{bmatrix}. \text{ Für } \underline{x} \in K^n \text{ sei } \hat{\underline{x}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ \overline{x}_1 \\ \vdots \\ \overline{x}_n \end{bmatrix}, \text{ d.h. } \hat{\underline{x}}$$

der aus den konjugierten Elementen gebildete Vektor.

Es sei $X_K^{(n)} = \{Q \in M(n,K),\ Q = Q^t\}$.

$X_K^{(n)}$ ist $n(n+1) = 2N$-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{Q}$.

1.1 Definition: $Q \in X_K^{(n)}$ heißt positiv definit (bzw. positiv semidefinit), wenn dies für Q und $\overline{Q}$ gilt.

Es sei $Y_K^{(n)} = \{Q \in X_K^{(n)};\ Q \text{ positiv definit}\}$ und

$\overline{Y}_K^{(n)} = \{Q \in X_K^{(n)};\ Q \text{ positiv semidefinit}\}$.

Indem man K als abstrakte Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$ betrachtet mit den Einbettungen

$\iota_1, \iota_2: K \to \mathbb{R}$, $\iota_1(a) = a$

$\iota_2(a) = \overline{a}$, läßt sich $Y_K^{(n)}$ in

$Y_{\mathbb{R}}^{(n)} \times Y_{\mathbb{R}}^{(n)}$ einbetten: (ι_1,ι_2): $Y_K^{(n)} \to Y_{\mathbb{R}}^{(n)} \times Y_{\mathbb{R}}^{(n)}$

$$Q \mapsto \hat{Q} .$$

$Y_K^{(n)}$ erhält so die reelle Dimension $2\,\frac{n(n+1)}{2} = 2N$.

Mit Hilfe einer Ganzheitsbasis $\{\zeta_1,\zeta_2\}$ von K und der Einheitsmatrix E_n bilden wir die Matrix

$$S = \begin{bmatrix} \zeta_1 E_n & \zeta_2 E_n \\ \overline{\zeta}_1 E_n & \overline{\zeta}_2 E_n \end{bmatrix} .$$

S besitzt folgende Eigenschaften:

1) Für $Q \in Y_K^{(n)}$ ist die Matrix $S^t\hat{Q}\,S \in Y_{\mathbb{Q}}^{(2n)}$.

2) Ist $\underline{y} \in \mathbb{Q}^{2n}$, so hat der Vektor $S\underline{y}$ die Gestalt $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ \overline{x}_1 \\ \vdots \\ \overline{x}_n \end{bmatrix}$, d.h. es ist $S\underline{y} = \hat{\underline{x}}$ für einen Vektor $\underline{x} \in K^n$. Ist insbesondere $\underline{y} \in \mathbb{Z}^{2n}$, so ist $Sy = \hat{\underline{x}}$ mit $\underline{x} \in \mathcal{O}_d^n$, $\mathcal{O}_d$ der Ring der ganzen Zahlen von K. Umgekehrt gibt es für jeden Vektor $\underline{x} \in \mathcal{O}_d^n$ eine Darstellung $\hat{\underline{x}} = S\underline{y}$, $\underline{y} \in \mathbb{Z}^{2n}$.

Es sei $Q \in X_K^{(n)}$ und $\underline{x} \in K^n$.

Eine quadratische Form $q(\underline{x})$ über K in n Variablen verstehen wir als die Summe

$$\hat{q}(\hat{\underline{x}}) = \hat{\underline{x}}^t\hat{Q}\,\hat{\underline{x}} = \underline{x}^tQ\,\underline{x} + \overline{\underline{x}}^t\overline{Q}\,\overline{\underline{x}} = q(\underline{x}) + \overline{q}(\overline{\underline{x}})$$

und unterscheiden (sofern Mißverständnisse ausgeschlossen) nicht zwischen q und zugehöriger Koeffizientenmatrix Q.

Mit Hilfe der Abbildungen ι_1,ι_2: $K \to \mathbb{R}$ läßt sich die Gruppe GL(n,K) einbetten:

$$(\iota_1,\iota_2): \quad GL(n,K) \to GL(n,\mathbb{R}) \times GL(n,\mathbb{R})$$

$$T \mapsto \begin{bmatrix} \iota_1(T) & 0 \\ 0 & \iota_2(T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & \overline{T} \end{bmatrix} = \hat{T} .$$

GL(n,K) operiert komponentenweise durch Transformation auf $X_K^{(n)}$: $\hat{Q} \mapsto \hat{T}^t\hat{Q}\,\hat{T}$.

Insbesondere operiert so die Gruppe $GL(n,\mathcal{O}_d)$ diskontinuierlich auf $Y_K^{(n)}$ und bestimmt auf $Y_K^{(n)}$ eine Äquivalenzrelation $\sim$. ($GL(n,\mathcal{O}_d)$ die Gruppe der Matrizen $T = [t_{ij}]$, $t_{ij} \in \mathcal{O}_d$ und $\det(T) = \varepsilon$, ε Einheit in K)

2. Binäre Formen und deren Automorphismen

Bezüglich der eingangs gestellten Frage nach einer Beziehung zwischen vollkommenen binären quadratischen Formen über K und elliptischen Fixpunkten der zugehörigen Hilbert'schen Modulgruppe einige Vorbemerkungen:

Es sei $G = PGL^+(2,\mathbb{R}) \times PGL^+(2,\mathbb{R})$,

$PGL^+(2,\mathbb{R}) = GL^+(2,\mathbb{R}) / \{\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}, a \neq 0\}$ und

$GL^+(2,\mathbb{R})$ die Gruppe der Matrizen aus $GL(2,\mathbb{R})$ mit positiver Determinante.

G operiert auf $H \times H$ durch

$z = (z^{(1)},z^{(2)}) \to T(z) = (T^{(1)}(z^{(1)}),(T^{(2)}(z^{(2)}))$

mit

$$T^{(i)}(z^{(i)}) = \frac{a^{(i)}z^{(i)} + b^{(i)}}{c^{(i)}z^{(i)} + d^{(i)}} \quad , \quad i = 1,2 \ .$$

Die Abbildungen $\iota_1, \iota_2 : K \to \mathbb{R}$ induzieren nun die Einbettung

$$\begin{aligned} GL^+(2,K) &\to GL^+(2,\mathbb{R}) \times GL^+(2,\mathbb{R}) \\ T &\mapsto (T,\bar{T}) \ , \end{aligned}$$

$GL^+(2,K)$ die Gruppe der Matrizen $T \in GL(2,K)$ mit totalpositiver Determinante ($\det(T) >> 0$).
Wir betrachten daher $GL^+(2,K)$ als Untergruppe von $GL^+(2,\mathbb{R}) \times GL^+(2,\mathbb{R})$; entsprechend $PGL^+(2,K)$ als Untergruppe von $PGL^+(2,\mathbb{R}) \times PGL^+(2,\mathbb{R})$.
$PSL(2,\mathcal{O}_d) := SL(2,\mathcal{O}_d)/\pm E_2$ heißt die Hilbert'sche Modulgruppe zu K. Man hat also $PSL(2,\mathcal{O}_d) \leq PGL^+(2,K) \leq G$.

$T \in G$ heißt elliptisch, wenn $T^{(1)}$ und $T^{(2)}$ elliptisch sind. Eine elliptische Transformation $T \in G$ hat genau einen Fixpunkt in $H \times H$. Ist Γ eine Untergruppe von G, so heißt $z \in H \times H$ elliptischer Fixpunkt von Γ, wenn z Fixpunkt einer elliptischen Transformation aus Γ ist.
Bekanntlich operiert $\Gamma := PSL(2,\mathcal{O}_d)$ diskontinuierlich auf $H \times H$, und die Anzahl der Γ-inäquivalenten elliptischen Fixpunkte ist endlich. Außerdem ist die Fixgruppe Γ_z für einen elliptischen Fixpunkt $z \in H \times H$ endlich und zyklisch. Besitzt Γ_z die Ordnung c, so heißt z elliptischer Fixpunkt der Ordnung c.
Für die Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, $d = 2,3,5$, wurde von K.B. Gundlach [8] ein vollständiges Repräsentantensystem Γ-inäquivalenter elliptischer Fixpunkte und zugehörige Fixgruppen explizit

angegeben.

Es sei $q(\underline{x}) = q_{11}x_1^2 + 2q_{12}x_1x_2 + q_{22}x_2^2 \in Y_K^{(2)}$. Wie in I.2 bilden wir die Wurzel τ von q als Lösung der quadratischen Gleichung $q_{11}\tau^2 - 2q_{12}\tau + q_{22} = 0$ mit positivem Imaginärteil.

2.1 Bemerkungen

1) Ist $\overline{\tau}$ die Wurzel von $\overline{q}(\underline{x})$, so ist $\tau = (\tau, \overline{\tau}) \in H \times H$, und bezüglich Γ äquivalente Formen aus $Y_K^{(2)}$ bestimmen Γ-äquivalente Punkte aus $H \times H$.

2) Ist $\tau' \in H \times H$ Γ-äquivalent mit τ und ist $q'(\underline{x}) = r(x_1^2 + (\tau' + \dot{\tau}')x_1x_2 + \tau'\dot{\tau}'x_2^2)$, $r \in K^+ := \{k \in K,\ k>>0\}$, die zu τ' gehörende quadratische Form, dann sind modulo K^+ die Formen q und q' äquivalent bezüglich Γ (die Beziehungen aus I.2 Seite 6-7 lassen sich unmittelbar übertragen). Insbesondere bestimmt die Fixgruppe $\Gamma_{\tau'}$ von τ' die Gruppe $\mathrm{Aut}^+(\tilde{q})$ der eigentlichen Automorphismen von $\tilde{q}(\underline{x}) = \frac{1}{r}\, q'(\underline{x})$ sind, welche auch eigentliche Automorphismen von $q'(\underline{x})$ sind.

Ist $q(\underline{x}) \in Y_{\mathcal{O}_d}^{(2)}$, so erhalten wir die Gruppe $\mathrm{Aut}^+(q)$ durch "Verallgemeinerung der Pell'schen Gleichung", d.h. durch Übertragung der auf C.F. Gauß zurückgehenden Methode zur Bestimmung der eigentlichen Automorphismen binärer Formen mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$ auf binäre Formen über $\mathcal{O}_d$:

2.2 Satz: Es sei $q(\underline{x}) = q_{11}x_1^2 + 2q_{12}x_1x_2 + q_{22}x_2^2 \in X_{\mathfrak{o}_d}^{(2)}$, $D := \det[q_{ij}] \neq 0$ und $\omega \in \mathfrak{o}_d$ gemeinsamer Teiler von q_{11}, q_{22} und $2q_{12}$. Dann ist

$T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $a,b,c,d \in \mathfrak{o}_d$ und $\det(T) = 1$ ein Automorphismus von q genau dann, wenn gilt:

$$a = \frac{1}{\omega}(t - q_{12}u), \qquad b = -\frac{1}{\omega} q_{22}u,$$

$$c = \frac{1}{\omega} q_{11}u, \qquad d = \frac{1}{\omega}(t + q_{12}u),$$

wobei t, u eine Lösung der Gleichung

$$t^2 + Du^2 = \omega^2$$

darstellt, so daß $2t, u \in \mathfrak{o}_d$ sind.

Der Beweis des Satzes ergibt sich unmittelbar aus dem Beweis des Gauß'schen Ergebnisses, so zum Beispiel aus dem Beweis von Theorem 50, Kap. VII.40 in [10]. Man vergleiche hierzu auch G.P. Lejeune Dirichlet's Untersuchung binärer quadratischer Formen über $\mathbb{Z}[i]$ in [5], §11.

2.3 Bemerkung: Da $GL(2,\mathfrak{o}_d)$ diskontinuierlich auf $Y_K^{(2)}$ operiert (jeweils zu betrachten unter den oben beschriebenen Einbettungen), ist $Aut^+(q)$ für $q \in Y_K^{(2)}$ endlich. (Vgl. [11], §5.5.)

Man erhält die volle Automorphismengruppe Aut(q), d.h. die Gruppe der Transformationen $T \in GL(2,\mathfrak{o}_d)$, $T^t q\, T = q$ und $\det(T) = \pm 1$, als semidirektes Produkt aus $Aut^+(q)$ mit der zyklischen Gruppe $\left\langle \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle$ der Ordnung 2.

III. Bestimmung vollkommener quadratischer Formen über reell-quadratischen Zahlkörpern

1. Die Methode

Zunächst einige Bezeichnungen, Definitionen und Bemerkungen:

Für $q \in Y_K^{(n)}$ sei $\mu(q) := \min \{\hat{\underline{x}}^t \hat{q} \hat{\underline{x}};\ \underline{0} \neq \underline{x} \in \mathfrak{o}_d^n\}$ das Minimum von q und $M(q) := \{\underline{m} \in \mathfrak{o}_d^n;\ \hat{\underline{m}}^t \hat{q} \hat{\underline{m}} = \mu(q)\}$ die Menge der Minimalvektoren von q.

1.1 Definition: $q \in Y_K^{(n)}$ heißt vollkommen, wenn es $n(n+1) = 2N$ Vektoren $\underline{m} \in M(q)$ gibt, so daß die Matrizen $\underline{m} \cdot \underline{m}^t$ linear unabhängig über $\mathbb{Q}$ sind (- bzw. äquivalent dazu: die Matrizen $\hat{\underline{m}} \cdot \hat{\underline{m}}^t$ linear unabhängig über $\mathbb{R}$ sind).

1.2 Bemerkungen:

1) Wegen $\underline{x}^t q \underline{x} = \underline{y}^t S^t q S \underline{y}$, $\underline{y} \in \mathbb{Z}^{2n}$ und S die in II.1 beschriebene Matrix, ist
$\mu(q) = \min \{\underline{y}^t S^t q S \underline{y};\ \underline{0} \neq \underline{y} \in \mathbb{Z}^{2n}\}$.

2) Identifiziert man die Vektoren $\pm\underline{m} \in M(q)$, so ist nach [11], Seite 416, die Anzahl s der Minimalvektoren von q durch $2^{2n} - 1$ beschränkt.

3) Eine nach 1.1 definierte vollkommene Form q ist auch im Voronoi'schen Sinne vollkommen. Beweis: Wäre dies falsch, so hätte das Gleichungssystem

$$(5)\quad \sum_{i,j=1}^{n} u_{ij} m_{ik} m_{jk} + \sum_{i,j=1}^{n} \bar{u}_{ij} \bar{m}_{ik} \bar{m}_{jk} = \mu(q),\quad \underline{m}_k \in M(q),$$

$k = 1,\ldots,s$, in den $2N$ Unbestimmten $u_{ij} = u_{ji}$, $\bar{u}_{ij} = \bar{u}_{ji}$

keine eindeutige Lösung, d.h. der Rang der s × 2N-Matrix $\left[\widehat{m_{ik}m_{jk}}\right]_{\substack{i,j=1,\ldots,n\\k=1,\ldots,s}}$ wäre kleiner 2N. Damit gäbe es eine nicht-triviale Lösung des zu (5) gehörenden homogenen Systems, und dies wäre ein Widerspruch dazu, daß es nach Voraussetzung 2N Vektoren $\underline{m}_k \in M(q)$ gibt, so daß die Matrizen $\widehat{\underline{m}_k \cdot \underline{m}_k^t}$ über $\mathbb{R}$ linear unabhängig sind.

Umgekehrt erfüllt eine Form $q \in Y_K^{(n)}$, die eindeutig durch Minimum und Minimalvektoren bestimmt ist, obige Definition. Beweis: Ansonsten gäbe es Vektoren $\underline{m}_1, \ldots, \underline{m}_{2N-1} \in M(q)$, sodaß sich jede Matrix $\widehat{\underline{m} \cdot \underline{m}^t}$, $\underline{m} \in M(q)$, als Linearkombination der $\widehat{\underline{m}_k \cdot \underline{m}_k^t}$ darstellen ließe:

$$\widehat{\underline{m} \cdot \underline{m}^t} = a_1 \widehat{\underline{m}_1 \cdot \underline{m}_1^t} + \cdots\cdots + a_{2N-1} \widehat{\underline{m}_{2N-1} \cdot \underline{m}_{2N-1}^t},$$

d.h. $a_1 \widehat{\underline{m}_1 \cdot \underline{m}_1^t} + \cdots\cdots + a_{2N-1} \widehat{\underline{m}_{2N-1} \cdot \underline{m}_{2N-1}^t} - \widehat{\underline{m} \cdot \underline{m}^t} = \left[\hat{0}\right]$, mindestens ein $a_i \neq 0$.

Daraus folgt, daß es eine nicht-triviale Lösung $(u_{ij}, \bar{u}_{ij})$ des Gleichungssystems

$$\sum_{i,j=1}^{n} u_{ij} m_{ik} m_{jk} + \sum_{i,j=1}^{n} \bar{u}_{ij} \bar{m}_{ik} \bar{m}_{jk} = 0 \quad , \; k = 1, \ldots, 2N,$$

$\underline{m}_{2N} := \underline{m}$,

gäbe und damit die Form

$$\sum_{i,j=1}^{n} (q_{ij} + u_{ij}) x_i x_j + \sum_{i,j=1}^{n} (\bar{q}_{ij} + \bar{u}_{ij}) \bar{x}_i \bar{x}_j$$

das gleiche Minimum und die gleichen Minimalvektoren wie q besitzen würde, d.h. q wäre nicht vollkommen im Voronoi'schen Sinne.

4) Da eine Form $q \in Y_K^{(n)}$ und eine zu ihr proportionale Form rq, $r \in \mathbb{Q}^{>0}$ dieselben Minimalvektoren besitzen,

betrachten wir vollkommene Formen in $Y_K^{(n)}$ modulo $\mathfrak{Q}^{>0}$; wir können uns daher bei der Untersuchung vollkommener Formen aus $Y_K^{(n)}$ auf solche mit vorgegebenem Minimum C beschränken. Es sei

$V_K^{(n)} = \{q \in Y_K^{(n)};\ q \text{ vollkommen und } \mu(q) = C\}$.

5) Jede zu einer vollkommenen Form äquivalente Form ist ebenfalls vollkommen, und die Zahl der Äquivalenzklassen in $V_K^{(n)}$ ist endlich ([11], Seite 418)

In [11], §9 wird eine Zerlegung von $Y_K^{(n)}$ durch "vollkommene Pyramiden" beschrieben. Diese stimmen mit unseren vollkommenen Polyeder-Kegeln überein. In [11] geht es jedoch nicht um Bestimmung und Klassifikation vollkommener Formen über K, sondern um die Existenz eines Fundamentalbereichs für die Gruppe $GL(n,\mathfrak{o}_d)$.

Anhand Voronoi's Klassifikationsmethode vollkommener Formen über $\mathbb{Q}$ [16] erhalten wir nun eine Methode zur Bestimmung der Klassen äquivalenter Formen aus $V_K^{(n)}$:

Es sei $v = [v_{ij}] \in V_K^{(n)}$.

Wir bilden anhand der Vektoren $\underline{m}_k \in M(v)$, $k = 1,\ldots,s$, die

Minimal-Linearformen

$$\hat{\ell}_k = \sum_{i=1}^{n} m_{ik}x_i + \sum_{i=1}^{n} \bar{m}_{ik}\bar{x}_i \ , \ k = 1,\ldots,s$$

und setzen

$$\hat{\ell}_k^2 = \ell_k^2 + \bar{\ell}_k^2 \quad \text{mit}$$

$$\ell_k = \sum_{i=1}^{n} m_{ik}x_i \quad \text{und} \quad \bar{\ell}_k = \sum_{i=1}^{n} \bar{m}_{ik}\bar{x}_i, \ k=1,\ldots,s.$$

Den quadratischen Formen ℓ_k^2 bzw. $\bar{\ell}_k^2$ entsprechen die Matrizen $\underline{m}_k \cdot \underline{m}_k^t$ bzw. $\bar{\underline{m}}_k \cdot \bar{\underline{m}}_k^t$ und damit den Formen $\hat{\ell}_k^2$ die Matrizen $\begin{bmatrix} \underline{m}_k \cdot \underline{m}_k^t & 0 \\ 0 & \bar{\underline{m}}_k \cdot \bar{\underline{m}}_k^t \end{bmatrix}$.

Die Formen $\hat{\ell}_k^2$ sind positiv semidefinit, da dies für ℓ_k^2 und $\bar{\ell}_k^2$ gilt.

Es sei

$$P_v = \{\hat{q}(\hat{\underline{x}}) \text{ für } q \in \bar{Y}_K^{(n)};\ \hat{q}(\hat{\underline{x}}) = \sum_{k=1}^{s} r_k \hat{\ell}_k^2,\ r_k \in \mathbb{R}^{\geq 0}\}$$

der von v erzeugte vollkommene Polyeder-Kegel.

Eigenschaften von P_v:

1) Aufgrund der Definition 1.1 ist die Dimension von P_v gleich 2N, d.h. gleich der (reellen) Dimension von $Y_K^{(n)}$.

2) P_v kann auch beschrieben werden als die Menge der Punkte $(q_{ij}, \bar{q}_{ij})_{i \leq j} = \hat{q} \in \mathbb{R}^{2N}$, die eine gewisse Zahl homogener linearer Ungleichungen erfüllen:

$$P_v = \{\hat{q} \in \mathbb{R}^{2N};\ \psi_l(\hat{q}) = \sum_{i \leq j} a_{ij}^{(l)} q_{ij} + \sum_{i \leq j} a_{ij}'^{(l)} \bar{q}_{ij} \geq 0,$$

$$a_{ij}, a_{ij}' \in \mathbb{R},\ l = 1, \ldots, u\},$$

d.h. P_v ist bestimmt durch die u Hyperebenen H_l: $\psi_l(\hat{q}) = 0$ und begrenzt durch die (2N-1)-dimensionalen Seitenflächen $W_l := H_l \cap P_v$ (vgl. [11], Seite 394), die wir Wände von P_v nennen.

Jede Kante $\mathbb{R}^{\geq 0} \hat{\ell}_k^2$, $k = 1, \ldots, s$, von P_v ist Lösung eines Systems von 2N-1 linear unabhängigen Gleichungen $\psi_l(\hat{q}) = 0$.

3) Es sei W eine Wand von P_v. Dann ist die Gleichung $\psi(\hat{q}) = 0$

der Hyperebene H, sodaß $H \cap P_v = W$ ist, bestimmt durch $2N - 1$ linear unabhängige Kantenformen $\hat{\ell}_k^2$:

Wir bilden das Gleichungssystem:

$$\psi(\hat{\ell}_k^2) = \sum_{i \leq j} a_{ij} m_{ik} m_{jk} + \sum_{i \leq j} a'_{ij} \bar{m}_{ik} \bar{m}_{jk} = 0 ,$$

$$k = 1,\ldots,2N-1,$$

mit den unbekannten Größen a_{ij}, a'_{ij}.

Der Lösungsvektor aus K^{2N} ist bis auf einen Faktor aus K eindeutig bestimmt. Die spezielle Gestalt des Gleichungssystems bedingt, daß es stets einen Lösungsvektor der Form $(\hat{b}_{ij}) = (b_{ij}, \bar{b}_{ij})_{i \leq j} \in K^{2N}$ gibt.

4) Übersteigt die Anzahl s der Minimalvektoren von v und damit die Anzahl der Kantenformen $\hat{\ell}_k^2$ die Dimension 2N von P_v, so können in einer Wand auch $t > 2N-1$ Kanten liegen, d.h. die Anzahl t der Kanten in W ist stets $\geq 2N-1$. Die t Kantenformen $\hat{\ell}_k^2$ erfüllen die Gleichung

$$\psi(\hat{\ell}_k^2) = 0, \quad k = 1,\ldots,t,$$

und für die Kanten $R^{\geq 0}\hat{\ell}_k^2$ von P_v, die nicht in W liegen, gilt $\psi(\hat{\ell}_k^2) > 0$, $k = t+1,\ldots,s$.

Ist $\hat{q} \in W$, so hat $\hat{q}$ eine Darstellung

$$(6) \qquad \hat{q} = \sum_{k=1}^{t} r_k \hat{\ell}_k^2, \quad r_k \geq 0.$$

5) Ist $\hat{q}$ innerer Punkt von W, so gilt $r_k > 0$, $k = 1,\ldots,t$.

Beweis: Es ist $\hat{g} := \sum_{k=1}^{t} \hat{\ell}_k^2$ innerer Punkt von W. Setze $\hat{q}' = \hat{q} - \rho\hat{g}$, $\rho > 0$, dann ist für hinreichend kleine ρ $\hat{q}'$ noch innerer Punkt von W, d.h. $\hat{q}'$ hat eine Darstellung $\hat{q}' = \sum_{k=1}^{t} r'_k \hat{\ell}_k^2$, $r'_k \geq 0$. Damit gilt

$\hat{q} = \sum_{k=1}^{t} (\rho + r_k')\hat{\ell}_k^2$ und mit $\rho + r_k' =: r_k$ die Behauptung.

1.3 Definition: $\hat{q}$ heißt innere Form von W, wenn in der Darstellung (6) $r_k > 0$ gilt, $k = 1,\ldots,t$.

Wie unter I.1 beschrieben, liegt Voronoi's Methode zur Klassifikation vollkommener Formen über $\mathbb{Q}$ die Bestimmung vollkommener Polyeder-Kegel zugrunde, welche mit einem vorgegebenen vollkommenen Polyeder-Kegel über eine gemeinsame Wand verbunden sind.
Wir beschränken uns daher (abweichend von [11], Seite 396) auf die Betrachtung der Wände vollkommener Polyeder-Kegel und beweisen folgenden Satz:

1.4 Satz: Es seien $v = [v_{ij}]$, $v' = [v_{ij}'] \in V_K^{(n)}$.
Sind W, W' Wände von P_v bzw. $P_{v'}$ und $\hat{p}$ innere Form von W und W', so ist $W = W'$.

Beweis: Es sei $M(v) = \{\underline{m}_k, k=1,\ldots,s\}$ und $M(v') = \{\underline{m}_k', k=1,\ldots,\sigma\}$. Wir bilden die Quadrate $\hat{\ell}_k^2$ und $\hat{\ell}_k'^2$ der entpsrechenden Minimal-Linearformen.
$L(v) := \{\hat{\ell}_1^2,\ldots,\hat{\ell}_t^2\}$ sei die Menge der Kantenformen von P_v, die in W enthalten sind und
$L(v') := \{\hat{\ell}_1'^2,\ldots,\hat{\ell}_\tau'^2\}$ die Menge der Kantenformen von $P_{v'}$, die in W' liegen.

Dann besitzt $\hat{p}$ die beiden Darstellungen

(7) $\quad W \ni \hat{p} = \sum_{k=1}^{t} r_k \hat{\ell}_k^2, \quad r_k > 0$ und

$$(8) \qquad W' \ni \hat{p} = \sum_{k=1}^{\tau} r_k \hat{\ell}_k'^2, \quad r_k' > 0 .$$

Die Behauptung des Satzes ist $L(v) = L(v')$.

Wir definieren auf $X_K^{(n)} \times X_K^{(n)}$ die Abbildung

$$\begin{aligned} <-,-> : \quad X_K^{(n)} \times X_K^{(n)} &\to K \\ <\hat{f},\hat{g}> &\mapsto \sum_{i,j=1}^{n} \hat{f}_{ij}\hat{g}_{ij} \\ &= \sum_{i,j} f_{ij}g_{ij} + \sum_{i,j} \bar{f}_{ij}\bar{g}_{ij}, \\ f = [f_{ij}] , \quad g &= [g_{ij}] . \end{aligned}$$

(<-,-> bestimmt auf $Y_K^{(n)}$ eine positiv definite symmetrische Bilinearform. Vgl. [11], Seite 412 .)

Wegen (7) gilt

$$(9) \qquad \begin{aligned} <\hat{p},\hat{v}> &= \sum_{k=1}^{t} r_k <\hat{v},\hat{\ell}_k^2> \\ <\hat{p},\hat{v}'> &= \sum_{k=1}^{t} r_k <\hat{v}',\hat{\ell}_k^2> , \end{aligned}$$

und wegen (8) ist

$$(10) \qquad \begin{aligned} <\hat{p},\hat{v}> &= \sum_{k=1}^{\tau} r_k' <\hat{v},\hat{\ell}_k'^2> \\ <\hat{p},\hat{v}'> &= \sum_{k=1}^{\tau} r_k' <\hat{v}',\hat{\ell}_k'^2> . \end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} <\hat{v},\hat{\ell}_k^2> &= \sum_{i,j=1}^{n} \hat{v}_{ij}\widehat{m_{ik}m_{jk}} = C , \\ <\hat{v}',\hat{\ell}_k^2> &= \sum_{i,j=1}^{n} \hat{v}'_{ij}\widehat{m_{ik}m_{jk}} \geq C , \quad k = 1,\ldots,s , \end{aligned}$$

und $$\langle \hat{v}, \hat{\ell}_k'^2 \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \hat{v}_{ij} \widehat{m_{ik} m_{jk}}' \geq C ,$$

$$\langle \hat{v}', \hat{\ell}_k'^2 \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \hat{v}_{ij}' \widehat{m_{ik} m_{jk}}' = C , \quad k = 1,\ldots,\sigma.$$

Also erhält man

$$\left.\begin{aligned} \langle \hat{p}, \hat{v}' \rangle - \langle \hat{p}, \hat{v} \rangle &\geq 0 \\ \langle \hat{p}, \hat{v}' \rangle - \langle \hat{p}, \hat{v} \rangle &\leq 0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \langle \hat{p}, \hat{v}' \rangle = \langle \hat{p}, \hat{v} \rangle .$$

Dies hat

(11) $$C = \langle \hat{v}, \hat{\ell}_k^2 \rangle = \langle \hat{v}', \hat{\ell}_k^2 \rangle , \quad k = 1,\ldots,t \text{ und}$$

(12) $$\langle \hat{v}, \hat{\ell}_k'^2 \rangle = \langle \hat{v}', \hat{\ell}_k'^2 \rangle = C , \quad k = 1,\ldots,\tau$$

zur Folge.

(11) und (12) bedeuten, daß $\underline{m}_1,\ldots,\underline{m}_t \in M(v)$ auch Minimalvektoren von v' und $\underline{m}_1',\ldots,\underline{m}_\tau' \in M(v')$ auch Minimalvektoren von v sind. Also ist

$$L(v) \subseteq \{\hat{\ell}_1'^2,\ldots,\hat{\ell}_\sigma'^2\} \quad \text{und}$$

$$L(v') \subseteq \{\hat{\ell}_1^2,\ldots,\hat{\ell}_s^2\} .$$

Nun ist W bestimmt durch eine Gleichung

(13) $$\psi(\hat{q}) = \sum_{i \leq j} a_{ij} q_{ij} + \sum_{i \leq j} a_{ij}' \bar{q}_{ij} = 0 , \quad a_{ij}, a_{ij}' \in K,$$

welche die Koeffizienten q_{ij}, $\bar{q}_{ij}$ der in W liegenden Formen $\hat{q}$ erfüllen, also insbesondere die Koeffizienten der Form $\hat{p} = \sum_{k=1}^{\tau} r_k' \hat{\ell}_k'^2$. Daher ist

$$\psi(\hat{p}) = \sum_{k=1}^{\tau} r_k' \underbrace{\left(\sum_{i \leq j} a_{ij} m_{ik}' m_{jk}' + \sum_{i \leq j} a_{ij}' \bar{m}_{ik}' \bar{m}_{jk}' \right)}_{= \psi(\hat{\ell}_k'^2)} = 0 .$$

Da $r_k' > 0$ ist, folgt $\psi(\hat{\ell}_k'^2) = 0$, $k = 1,\ldots,\tau$.
($\psi(\hat{\ell}_k'^2)$ kann nicht negativ sein, da - wie bereits gezeigt - $L(v') \subseteq \{\hat{\ell}_1^2,\ldots,\hat{\ell}_s^2\}$, und die Kantenformen $\hat{\ell}_k^2$ von P_v die Ungleichungen $\psi(\hat{\ell}_k^2) \geq 0$, $k = 1,\ldots,s$, erfüllen.)

Damit gilt $L(v') \subseteq L(v)$.

Analog erhält man die umgekehrte Relation, indem man von P_v' ausgeht und $\hat{p}$ in der Darstellung $\hat{p} = \sum_{k=1}^{t} r_k \hat{\ell}_k^2$, $r_k > 0$, betrachtet.

1.5 Bemerkung: Ist $\hat{p}$ innere Form von P_v und P_v', d.h. besitzt $\hat{p}$ die Darstellungen $\hat{p} = \sum_{k=1}^{s} r_k \hat{\ell}_k^2$, $r_k > 0$, und $\hat{p} = \sum_{k=1}^{\sigma} r_k' \hat{\ell}_k'^2$, $r_k' > 0$, so ist $P_v = P_v'$.

Beweis: Man setze im Beweis von Satz 1.4 anstelle der Gleichung (13) die Ungleichungen ein, welche P_v (bzw. P_v') bestimmen.

1.6 Definition: Es seien $v, v' \in V_K^{(n)}$. Die vollkommenen Polyeder-Kegel P_v und P_v' heißen benachbart, wenn sie über eine gemeinsame Wand W miteinander verbunden sind.
v und v' heißen dann Nachbarformen (entlang W).

Der folgende Satz beschreibt, in welcher Beziehung Nachbarformen zueinander stehen:

1.7 Satz: Es seien $v = [v_{ij}]$, $v' = [v'_{ij}] \in V_K^{(n)}$, P_v und $P_{v'}$ benachbart. $W := P_v \cap P_{v'}$ sei bestimmt durch die Gleichung $\psi(\hat{q}) = \sum_{i\le j} \hat{a}_{ij}\hat{q}_{ij} = 0$. Dann gilt:

$$\hat{v}'(\hat{\underline{x}}) = \hat{v}(\hat{\underline{x}}) + \delta\hat{\psi}(\hat{\underline{x}}) ,$$

wobei $\psi(\underline{x}) \in X_K^{(n)}$ durch die Gleichung $\psi(\hat{q}) = 0$ festgelegt und $\delta \in \mathbb{Q}^{>0}$ eindeutig bestimmt ist.

Beweis: Es sei $M(v) = \{\underline{m}_k, k=1,\dots,s\}$ und

$$M(v') = \{\underline{m}'_k, k=1,\dots,\sigma\} .$$

W enthalte die Kantenformen $\hat{\ell}_1^2,\dots,\hat{\ell}_t^2 \in P_v$, so daß die Gleichungen

$$(14) \qquad \psi(\hat{\ell}_k^2) = \sum_{i\le j} a_{ij}m_{ik}m_{jk} + \sum_{i\le j} \bar{a}_{ij}\bar{m}_{ik}\bar{m}_{jk} = 0$$

für $k = 1,\dots,t$ erfüllt sind.

Nach Voraussetzung sind $\hat{\ell}_1^2,\dots,\hat{\ell}_t^2$ auch in $P_{v'}$ enthalten, d.h. es gilt

$$\sum_{i,j=1}^{n} \hat{v}_{ij}\widehat{m_{ik}m_{jk}} = C = \sum_{i,j=1}^{n} \hat{v}'_{ij}\widehat{m_{ik}m_{jk}} , \quad k = 1,\dots,t.$$

Hieraus folgt

$$(15) \qquad \sum_{i,j=1}^{n} (v'_{ij} - v_{ij})m_{ik}m_{jk} + \sum_{i,j=1}^{n} (\bar{v}'_{ij} - \bar{v}_{ij})\bar{m}_{ik}\bar{m}_{jk} = 0 ,$$

$$k = 1,\dots,t ,$$

und der Vergleich mit (14) ergibt

$$v'_{ii} = v_{ii} + \delta a_{ii} , \qquad \bar{v}'_{ii} = \bar{v}_{ii} + \delta\bar{a}_{ii} ,$$

$$2v'_{ij} = 2v_{ij} + \delta a_{ij} , \qquad 2\bar{v}_{ij} = 2\bar{v}_{ij} + \delta\bar{a}_{ij}$$

für $i<j$, $\delta \in \mathbb{Q}$.

Setzt man

$$\psi(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{n} a_{ij}x_ix_j \ , \ (a_{ji} = a_{ij}) \ ,$$

so gilt wegen (15)

$$\hat{v}'(\hat{\underline{x}}) = \hat{v}(\hat{\underline{x}}) + \delta\hat{\psi}(\hat{\underline{x}}) \ . \tag{16}$$

Es sei $\underline{m}_k \in M(v)$, so daß $k \in \{t+1,\ldots,s\}$, d.h. $\hat{\ell}_k^2 \notin W$ ist. Dann ist

$$\hat{v}(\hat{\underline{m}}_k) = C, \quad \hat{v}'(\hat{\underline{m}}_k) > C \quad \text{und} \quad \hat{\psi}(\hat{\underline{m}}_k) > 0, \quad \text{und aus}$$

der Gleichung (13) folgt (für $\underline{x} = \underline{m}_k$) $\delta > 0$.

Es seien $\underline{m}_k'$, $k = 1,\ldots,r$, die Minimalvektoren von v', die nicht gleichzeitig Minimalvektoren von v sind.

Wegen (16) gilt dann

$$\hat{v}'(\hat{\underline{m}}_k') = \hat{v}(\hat{\underline{m}}_k') + \delta\hat{\psi}(\hat{\underline{m}}_k') \ , \quad k = 1,\ldots,r \ ,$$

wobei $\hat{v}(\hat{\underline{m}}_k') > C$ und $\hat{\psi}(\hat{\underline{m}}_k') < 0$ ist, $k = 1,\ldots,r$,

und für δ erhält man $\delta = \dfrac{\hat{v}(\hat{\underline{m}}_k') - C}{-\hat{\psi}(\hat{\underline{m}}_k')}$, $k = 1,\ldots,r$.

Wir betrachten die Funktion

$$F(\hat{\underline{x}}) = \frac{\hat{v}(\hat{\underline{x}}) - C}{-\hat{\psi}(\hat{\underline{x}})} \quad \text{für } \underline{x} \in \mathfrak{o}_d^n \setminus \{\underline{0}\} \text{ unter der Voraus-}$$

setzung $\hat{\psi}(\hat{\underline{x}}) < 0$.

Die Werte von $F(\hat{\underline{x}})$ sind positive rationale Zahlen, da dies für die Werte von Zähler und Nenner gilt, und δ ist der kleinste Wert, den die Funktion $F(\hat{\underline{x}})$ unter den genannten Voraussetzungen annimmt. Denn angenommen, es gäbe ein $\underline{x}_0 \in \mathfrak{o}_d^n \setminus \{\underline{0}\}$, so daß $F(\hat{\underline{x}}) < \delta$ ist, so wäre

$\hat{v}'(\hat{\underline{x}}_0) = \hat{v}(\hat{\underline{x}}_0) + \delta\hat{\psi}(\hat{\underline{x}}_0) < C$, was nicht sein kann.

Mit diesem Ergebnis erhält man nun ein Verfahren zur Bestimmung der Klassen äquivalenter Formen aus $V_K^{(n)}$. Hierbei spielt die Gruppe Aut(v), $v \in V_K^{(n)}$, eine wesentliche Rolle. Ist $T \in \mathrm{Aut}(v)$, so permutiert T die Vektoren $\underline{m} \in M(v)$, also permutiert T^t die Formen ℓ^2. Damit läßt die Menge Γ_v der Transformationen T, $T^t \in \mathrm{Aut}(v)$, den Polyeder-Kegel P_v invariant und permutiert dessen Wände. Γ_v ist gleich dem Stabilisator von P_v.
Sind zwei Wände W_k und W_l von P_v äquivalent bezüglich Γ_v, d.h. sind die in W_k bzw. W_l liegenden Kantenformen $\ell_1^2,\ldots,\ell_t^2$ bzw. $\ell_1'^2,\ldots,\ell_t'^2$ (als ungeordnete Mengen) äquivalent bezüglich Γ_v, dann sind die quadratischen Formen $\psi_k(\underline{x})$ und $\psi_l(\underline{x})$ äquivalent bezüglich Aut(v) und somit die Nachbarformen $v_k(\underline{x})$ und $v_l(\underline{x})$ von v (in der Darstellung $\hat{v}_k(\hat{\underline{x}}) = \hat{v}(\hat{\underline{x}}) + \delta_k\hat{\psi}_k(\hat{\underline{x}})$ und $\hat{v}_l(\hat{\underline{x}}) = \hat{v}(\hat{\underline{x}}) + \delta_l\hat{\psi}_l(\hat{\underline{x}})$) äquivalent bezüglich Aut(v).

Daher induzieren äquivalente Wände von P_v äquivalente Nachbarformen von v, und die Bestimmung vollkommener Formen besteht bei Kenntnis der Gruppe Aut(v) zunächst darin, die Menge der Wände von P_v in Bahnen nach Γ_v zu zerlegen, wobei wir für äquivalente Wände $t = t'$ fordern. Aus den Bahnen wählen wir Repräsententen, um so die Zahl der Wände, welche - falls die Differenz aus der Zahl s der Minimal-

vektoren und der Dimension 2N groß ist - sehr groß sein kann, auf die Zahl der relevanten zu reduzieren.
Zu den so verbliebenen Wänden bestimmen wir die Nachbarformen und untersuchen diese auf Äquivalenz untereinander bzw. auf Äquivalenz zu bereits gefundenen vollkommenen Formen. Die Klassifikation erfolgt dann wie unter I.1 beschrieben.

Eine für diese Vorgehensweise notwendige vollkommene Ausgangsform ϕ_0 geben wir für die Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, d =2,3,5, im nächsten Abschnitt an.

2. Eine über $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, d =2,3,5, vollkommene Form

2.1 Satz: e sei die Grundeinheit von $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, d = 2,3,5.

i) Ist d = 2 oder d = 5, so ist die quadratische Form

$$\phi_0(\underline{x}) = e\sqrt{d}\ \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n} x_i x_j\Big) \quad \text{vollkommen.}$$

ii) Ist d = 3, so ist die quadratische Form

$$\phi_0(\underline{x}) = e\ \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n} x_i x_j\Big) \quad \text{vollkommen.}$$

Zum Beweis zwei Lemmata:

2.2 Lemma: Es sei $e = \alpha + \beta\sqrt{d}$ die Grundeinheit von $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, $d = 2$ oder $d = 5$. Dann ist die quadratische Form

$$\phi_0(\underline{x}) = e\sqrt{d}\ \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \ + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} x_i x_j\Big)$$

positiv definit, und es ist $\mu(\phi_0) = 2d\beta$.

Beweis:

Wir fassen $v := \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} x_i x_j$ als quadratische Form über $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ auf. Da $v = \bar{v}$ und v als Form über $\mathbb{R}$ positiv definit ist, gilt dies für $\hat{v} = v + \bar{v}$.

Da $e > 1$ ist, ist $e\sqrt{d} >> 0$ und damit ϕ_0 positiv definit.

Es sei $d = 2$. Dann ist $e = 1 + \sqrt{2}$.

Für $\underline{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ ist $\hat{\phi}_0(\underline{x}) = 4$ und damit $\mu(\phi_0) \leq 4$; wir behaupten: es gilt die Gleichheit. Ansonsten gibt es ein Element $\underline{0} \neq \underline{x} \in \mathcal{O}_2^n$ mit $v(\underline{x}) = a + b\sqrt{2}$, $a,b \in \mathbb{Z}$, und

$$\hat{\phi}_0(\underline{x}) = (2 + \sqrt{2})(a + b\sqrt{2}) + (2 - \sqrt{2})(a - b\sqrt{2})$$
$$= 4a + 4b < 4.$$

Dies ist aber ein Widerspruch dazu, daß ϕ_0 positiv definit ist und Koeffizienten aus $\mathbb{Z}$ besitzt.

Es sei $d = 5$. Dann ist $e = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$. Wegen $\hat{\phi}_0\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}\right) = 5$, ist $\mu(\phi_0) \leq 5$.

Auch hier gilt die Gleichheit, denn ansonsten gäbe es ein Element $\underline{0} \neq \underline{x} \in \mathcal{O}_5^n$ mit $v(\underline{x}) = \frac{1}{2}(a + b\sqrt{5}) \in \mathcal{O}_5$, $a,b \in \mathbb{Z}$, entweder a und b gerade oder a und b ungerade, und

$$\hat{\phi}_0(\hat{\underline{x}}) = \frac{1}{4}\left((5+\sqrt{5})(a+b\sqrt{5}) + (5-\sqrt{5})(a-b\sqrt{5})\right)$$

$$= \frac{5}{2}(a+b) < 5.$$

Da ϕ_0 positiv definit ist, würde dies $0 < \frac{a+b}{2} < 1$ bedeuten. Das ist aber ein Widerspruch zu $\frac{1}{2}(a+b\sqrt{5}) \in \mathfrak{o}_5$.

2.3 Lemma: Ist ε die Grundeinheit von $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$, dann ist die quadratische Form

$$\phi_0(\underline{x}) = \varepsilon\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} x_i x_j\right)$$

positiv definit, und es ist $\mu(\phi_0) = 4$.

Beweis: Da v über $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ positiv definit - v wie bei Lemma 2.2 - und $\varepsilon = 2+\sqrt{3} >> 0$ ist, gilt die erste Behauptung.

Für $\underline{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ ist $\hat{\phi}_0(\hat{\underline{x}}) = 4$ und damit $\mu(\phi_0) \leq 4$.

Wir schreiben die Form ϕ_0 in der Gestalt

$$\phi_0(\underline{x}) = \frac{1}{2}\varepsilon\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right)$$

$$=: \frac{1}{2}\varepsilon\, v'(\underline{x}).$$

Angenommen, es ist $\mu(\phi_0) < 4$, dann muß es ein Element $\underline{0} \neq \underline{x} \in \mathfrak{o}_3^n$ geben, mit $v'(\underline{x}) = 2\bar{\varepsilon}$. Dieser Wert kann jedoch von v' (als einer Summe von Quadraten, wobei x_i^2 für $i = 1,\ldots,n$ zweimal auftritt) nicht dargestellt werden.

Beweis von Satz 2.1:

zu i): Nach Lemma 2.2 ist ϕ_0 positiv definit und $\mu(\phi_0) = 2d\beta$. Die folgenden 2N Vektoren aus O_d^n sind Minimalvektoren von ϕ_0:

$$\underline{m}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \leftarrow k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad k = 1,\ldots,n, \qquad \underline{m}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \leftarrow i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \leftarrow j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} i,j=1,\ldots,n \\ i<j \\ \\ \\ k=n+1,\ldots,N \end{matrix}$$

$$\underline{m}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \bar{e} \leftarrow i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} i=1,\ldots,n \\ \\ k=N+1,\ldots,N+n, \end{matrix} \qquad \underline{m}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \bar{e} \leftarrow i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\bar{e} \leftarrow j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} i,j=1,\ldots,n \\ i<j \\ \\ \\ k=N+n+1,\ldots \\ \ldots,2N. \end{matrix}$$

Für $k = 1,\ldots,N$ gilt $\hat{\phi}_0(\hat{\underline{m}}_k) = e\sqrt{d} - \bar{e}\sqrt{d} = 2d\beta$, und für $k = N+1,\ldots,2N$ gilt

$\hat{\phi}_0(\hat{\underline{m}}_k) = e\sqrt{d}\,\bar{e}^2 - \bar{e}\sqrt{d}\,e^2 = -\bar{e}\sqrt{d} + e\sqrt{d} = 2d\beta$.

Es ist offensichtlich, daß die Matrizen $\underline{m}_k \cdot \underline{m}_k^t$ über $\mathbb{Q}$ linear unabhängig sind.

zu ii): Nach Lemma 2.3 ist ϕ_0 positiv definit und $\mu(\phi_0) = 4$. Die oben genannten Vektoren $\underline{m}_k$, $k = 1,\ldots,2N$, sind mit $e = 2 + \sqrt{3}$ Minimalvektoren von ϕ_0:

Es ist $\hat{\phi}_0(\hat{\underline{m}}_k) = e + \bar{e} = 4$ für $k = 1,\ldots,N$ und

$\hat{\phi}_0(\hat{\underline{m}}_k) = e\,\bar{e}^2 + \bar{e}\,e^2 = e + \bar{e} = 4$ für $k = N+1,\ldots,2N$.

Aufgrund der linearen Unabhängigkeit der Matrizen $\underline{m}_k \cdot \underline{m}_k^t$

gilt die Behauptung für ϕ_0.

2.4 Bemerkungen:

1) Außer den genannten Vektoren $\underline{m}_k$, k = 1,...,2N, können für ϕ_0 weitere Minimalvektoren existieren.

2) Sicherzustellen, daß (für einen beliebigen reellquadratischen Zahlkörper K) sämtliche Minimalvektoren einer Form $\phi \in V_K^{(n)}$ bestimmt sind, hilft die Transformation $S^t\hat{\phi}\, S =: q \in Y_{\mathbb{Q}}^{(2n)}$, S die in II.1. beschriebene Matrix; es ist #M(ϕ) = #M(q).
Für n = 2 und "kleine d" erweisen sich Tabellen positiv definiter reduzierter quaternärer Formen, zum Beispiel in [6], als sehr nützlich.

3) Mit der Angabe einer über $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, d = 2,3,5, vollkommenen Form ϕ_0 als Ausgangsform ist es nun bei genauer Kenntnis von deren Minimalvektoren mit Hilfe des im nächsten Abschnitt beschriebenen Computer-Algorithmus möglich, den vollkommenen Polyeder-Kegel P_{ϕ_0} explizit durch seine Wände zu bestimmen, um dann das durch Satz 1.7 mögliche Verfahren zur Klassifikation durchzuführen.
Dazu sei betont, daß der Algorithmus (und zugehöriges Computer-Programm) so konstruiert ist, daß er nicht nur für die Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, d = 2,3,5, sondern bei bekannter Ausgangsform und deren Minimalvektoren für jeden reellquadratischen Zahlkörper anwendbar ist.

3. Ein Computer-Algorithmus

a) Vorbemerkungen

Wie in III.1. beschrieben, ist für $v \in V_K^{(n)}$ die Zahl s der Minimalvektoren $\geq 2N$. Gilt die Gleichheit, so lassen sich die genau 2N Wände von P_v, welche durch die Gleichungen $\psi_k(\hat{q}) = 0$, $k=1,\ldots,2N$, festgelegt sind, auf einfache Weise aus der Gleichung

$$\hat{q}(\underline{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} q_{ij}x_ix_j + \sum_{i,j=1}^{n} \bar{q}_{ij}\bar{x}_i\bar{x}_j = \sum_{k=1}^{n} r_k\hat{\ell}_k^2,\ r_k \geq 0,$$

bestimmen, indem sich zunächst durch Koeffizientenvergleich

$$q_{ij} = \sum_{k=1}^{2N} r_k m_{ik}m_{jk} \qquad \text{und}$$

$$\bar{q}_{ij} = \sum_{k=1}^{2N} r_k \bar{m}_{ik}\bar{m}_{jk},\ i,j=1,\ldots,n,\ i\leq j, \tag{17}$$

ergibt. Betrachtet man dann (17) als ein Gleichungssystem mit 2N Gleichungen (vom Rang 2N) für die Unbestimmten r_k, $k = 1,\ldots,2N$, so erhält man die "Lösungen"

$$0 \leq r_k = L_k(\hat{q}),\ k = 1,\ldots,2N,$$

wobei die L_k gerade die Linearformen ψ_k darstellen, welche die 2N Wände von P_v bestimmen.

Ist jedoch $s-2N = :\rho > 0$, so treten ρ Parameter $u_1,\ldots,u_\rho$ auf und es gilt

$$0 \leq r_k = L_k(\hat{q}) + M_k(\underline{u}),$$

L_k und M_k Linearformen und $\underline{u} = (u_1,\ldots,u_\rho)$. Ist ρ "klein", so kann es in günstigen Fällen durch Eliminieren der Para-

meter gelingen, die Gleichungen $\psi_l(\hat{q}) = 0$ der Hyperebenen, auf welchen die Wände von P_v liegen, zu bestimmen. Man erhält jedoch auf diese Art keine allgemeine Methode zur Bestimmung der Wände von P_v.

Wir haben daher einen Computer-Algorithmus entwickelt, der auf folgenden Überlegungen beruht:

Ist W eine Wand von P_v, bestimmt durch die Gleichung $\psi(\hat{q}) = 0$, so liegen die Kantenformen $\hat{\ell}_1^2,\ldots,\hat{\ell}_t^2$ genau dann in W, wenn

i) das Gleichungssystem

$$\psi(\hat{\ell}_k^2) = \sum_{i\le j} a_{ij} m_{ik} m_{jk} + \sum_{i\le j} a'_{ij} \bar{m}_{ik} \bar{m}_{jk} = 0, \quad k=1,\ldots,t,$$

in den Unbestimmten a_{ij}, a'_{ij} den Rang 2N-1 hat, so daß die Lösung $(a_{ij},a'_{ij})_{i\le j} \in K^{2N}$ bis auf einen Faktor aus K eindeutig bestimmt ist und

ii) diese Lösung (mit geeignetem Vorzeichen) die Ungleichung $\psi(\hat{\ell}_k^2) > 0$, $k = t+1,\ldots,s$ erfüllt.

Aus der Menge der s Kantenformen $\hat{\ell}_k^2$ von P_v bilden wir nun alle Kombinationen von 2N-1 Kantenformen $\hat{\ell}_k^2$. Diese $\binom{s}{2N-1}$ Kombinationen untersuchen wir auf lineare Unabhängigkeit und verwerfen die linear abhängigen Kombinationen. Aus den linear unabhängigen Kombinationen bilden wir jeweils ein Gleichungssystem

$$\sum_{i\le j} a_{ij} m_{ik} m_{jk} + \sum_{i\le j} a'_{ij} \bar{m}_{ik} \bar{m}_{jk} = 0, \quad k = 1,\ldots,2N-1,$$

und lösen dieses für die unbekannten Größen a_{ij}, a'_{ij}. Der

Lösungsvektor $(a_{ij},a'_{ij}) \in K^{2N}$ bestimmt die Koeffizienten der Gleichung

$$(18) \quad \psi(\hat{q}) = \sum_{i\leq j} a_{ij}q_{ij} + \sum_{i\leq j} a'_{ij}\bar{q}_{ij} = 0.$$

Um entscheiden zu können, ob auf der Hyperebene, welche durch (18) bestimmt ist, eine Wand von P_v liegt, müssen nach ii) die Werte $\psi(\hat{\ell}_k^2)$, $k = 2N,\ldots,s$, gebildet werden. Gibt es Kantenformen $\hat{\ell}_j^2$ und $\hat{\ell}_k^2$, $j\neq k$, $j,k \in \{2N,\ldots,s\}$, so daß die Werte $\psi(\hat{\ell}_j^2)$ und $\psi(\hat{\ell}_k^2)$ verschiedene Vorzeichen haben, so repräsentiert (18) keine Wand von P_v und wird verworfen.

Der gesamte Vorgang wird für alle Kombinationen von 2N-1 linear unabhängigen Kantenformen durchgeführt. Auf diese Weise erhalten wir die Wände W von P_v und gleichzeitig eventuelle weitere in W liegende Kantenformen; diese erfüllen bei obigem Einsetztest die Gleichung $\psi(\hat{\ell}_k^2) = 0$. Damit sind die Wände von P_v und die in ihnen liegenden Kantenformen eindeutig festgelegt.

Die beschriebene Vorgehensweise enthält die Aufgabe, mit Hilfe der Rechenanlage unterbestimmte homogene lineare Gleichungssysteme von 2N-1 linear unabhängigen Gleichungen und 2N Variablen mit Koeffizienten aus O_d zu lösen, sodaß die Komponenten des Lösungsvektors aus K sind. Dazu ist es notwendig, die Elemente der Koeffizientenmatrix Z des

Gleichungssystems in drei Dimensionen zu speichern: $Z(2N-1,2N,3)$. Die Elemente $z_{ij} \in Z$ in der Speicherform $z_{ij1} = a$, $z_{ij2} = b$ und $z_{ij3} = c$ sind zu lesen wie $c^{-1}(a + b\sqrt{d}) \in K$, $a,b,c \in \mathbb{Z}$.

Das Programm zur Lösung der Gleichungssysteme beruht auf dem Gauß'schen Eliminationsverfahren, d.h. Z wird durch einen Eliminationsalgorithmus auf obere Dreiecksgestalt reduziert.

Die Rechenregeln der Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division:

$$c_1^{-1}(a_1+b_1\sqrt{d}) \pm c_2^{-1}(a_2+b_2\sqrt{d}) = (c_2a_1 \pm c_1a_2, c_2b_1 \pm c_1b_2, c_1c_2),$$

$$c_1^{-1}(a_1+b_1\sqrt{d}) \cdot c_2^{-1}(a_2+b_2\sqrt{d}) = (a_1a_2+b_1b_2d, a_2b_1+a_1b_2, c_1c_2),$$

$$c_1^{-1}(a_1+b_1\sqrt{d}) : c_2^{-1}(a_2+b_2\sqrt{d}) = (c_2(a_1a_2-b_1b_2d), c_2(a_2b_1-a_1b_2), c_1(a_2^2-b_2^2d))$$

erlauben es so, das Verfahren in den drei Komponenten der Matrixelemente ganzzahlig durchzuführen. Dabei entstehen jedoch im Laufe des Eliminationsalgorithmus sehr große Zahlen. Der Gefahr des Overflows begegnet man, indem nach jedem Eliminationsschritt gekürzt wird. Die durch Unterbestimmtheit des Gleichungssystems frei wählbare Komponente wird durch den Wert 1 festgelegt. Die weiteren Komponenten werden dann sukzessive aus der reduzierten Matrix errechnet. Der Lösungsvektor aus K^{2N} besitzt Komponenten der Gestalt $c^{-1}(a+b\sqrt{d})$, wobei $a,b,c \in \mathbb{Z}$ und ohne Rundungsfehler sind.

b) Das Computer-Programm (in Kurzfassung) *)

Ein-/Ausgabe

INPUT-FILE 1

Die Kantenformen des vollkommenen Polyeder-Kegels bilden - aufgefaßt als Vektoren des $\mathbb{R}^{2N}$ - eine Datei; die Komponenten dieser Vektoren, welche wir im weiteren Kantenvektoren nennen, sind formatfrei. Verarbeitet wird sequentiell.

INPUT -FILE 2

Aus der Menge der s Kantenvektoren werden alle (2N-1)-Kombinationen gebildet und durch eine Bibliotheksfunktion auf lineare Abhängigkeit geprüft. Die linear unabhängigen Kombinationen werden in der Form eines Arrays, in welchem die Nummern der Kantenvektoren dieser Kombinationen gespeichert sind, ausgegeben. Auf die erzeugte Ausgabe-Datei wird als INPUT-FILE 2 zugegriffen. Verarbeitet wird sequentiell.

OUTPUT-FILE

Ausgegeben werden die Lösungen der relevanten Gleichungssysteme, d.h. die Vektoren $(a_{ij},a'_{ij})_{i\leq j}$, durch welche die Gleichungen $\psi_1(\hat{q}) = 0$ der den vollständigen Polyeder-Kegel bestimmenden Hyperebenen festgelegt sind, und außerdem die in diesen Hyperebenen liegenden Kantenformen des Kegels.

---

*) *Für die Hilfe beim Erstellen des Programms in FORTRAN danke ich Herrn D. Golke.*

PROGRAM: GLSYST

```
    /Bildschirm-Kommunikation: System-Parameter/

1.  ACCEPT #EDGE-VECTORS
2.  ACCEPT D (IN: A + B√D)
3.  ACCEPT N (= PARAMETER FOR DIMENSION N²+N)

    LET SPACE-DIMENSION, #COLUMNS ← N²+N
    LET #ROWS, #EQUATIONS ← #COLUMNS - 1


    MAINLINE

    OPEN INPUT-FILE 1, INPUT-FILE 2, OUTPUT-FILE (LIST)

1.  /Einlesen der Kantenvektoren des Ausgangskegels/

    FOR 1 ≦ I ≦ #EDGE-VECTORS DO:
       READ INPUT-FILE 1 INTO EDGE-MATRIX ROW(I)
    END

    LET #OUTPUT-RECORDS ← Ø
    LET #INPUT-RECORDS ← Ø

2.  /Steuerung: Leseschleife und Unterprogramm-Aufrufe/

    READ INPUT-FILE 2 INTO ARRAY-OF-NUMBERS (AT END: GO TO 99)

    LET #INPUT-RECORDS ← #INPUT-RECORDS + 1
    FOR 1 ≦ I ≦ #ROWS DO:
       CALL SUBROUTINE FUELL(I)
    END

    CALL SUBROUTINE ELIM
    CALL SUBROUTINE SOLVE
    CALL SUBROUTINE TEST
    GO TO 2.

99. /Ende des Programms/

    CLOSE FILES
    END
```

FUELL: SUBROUTINE: *Auswahl der Vektoren für das Gleichungssystem aus der Menge der Kantenvektoren (wie in* ARRAY-OF-NUMBERS *beschrieben)*

```
ARGUMENT: M
LET K ← NUMBER OF THE M-TH VECTOR
FOR 1 ≦ I ≦ SPACE-DIMENSION DO:
   LET SYSTEM-MATRIX(M,I,1) ← EDGE-MATRIX(K,I,1)
   LET SYSTEM-MATRIX(M,I,2) ← EDGE-MATRIX(K,I,2)
   LET SYSTEM-MATRIX(M,I,3) ← 1
END
RETURN
```

ELIM: SUBROUTINE: *Reduzieren der System-Matrix auf obere Dreiecksgestalt des Formats* #COLUMNS × #ROWS

```
FOR 1 ≦ J ≦ #ROWS-1 DO:          /Anzahl der Eliminationsschritte/
```

1. */Suche nach Elementen mit Wert Ø in der aktuellen Spalte(J)/*

```
   FOR J ≦ K ≦ #ROWS-1 DO:          /Sortieralgorithmus/
      IF SYSTEM-MATRIX(K,J) = Ø CHANGE ROW(K) WITH ROW(L)
   END
END
```

2. */Suche Zeilennummer mit Spaltenwert(J) ≠ Ø. Merke in* HBOUND./

```
SET HBOUND ← #ROWS
FOR #ROWS ≧ K ≧ 1 DO:
   LET HBOUND ← K
   IF SYSTEM-MATRIX(K,J) IS NOT ZERO GO TO 3.
END
```

3. */Egalisieren der Elemente in Spalte(J) im Bereich Zeile(J) bis Zeile(*HBOUND*)/*

```
FOR J ≦ K ≦ HBOUND DO:
   DETERMINE THE FACTOR NECESSARY FOR CHANGING SYSTEM-MATRIX(K,J)
   TO 1
   FOR J ≦ L ≦ #COLUMNS DO:
      MULTIPLY ROW(K), I.E. SYSTEM-MATRIX(K,L) WITH THAT FACTOR
   END
END
```

4. */Elimination/*

```
FOR J+1 ≦ K ≦ HBOUND DO:
   FOR J ≦ L ≦ #COLUMNS DO:
      SUBTRACT SYSTEM-MATRIX(J,L) FROM SYSTEM-MATRIX(K,L)
   END
END
```

5. */Kürzen/*

```
CALL SUBROUTINE SIMPLI
```

SOLVE: SUBROUTINE: *Auflösen des reduzierten Gleichungssystems*

1. */Untersuche, ob die Elemente der Hauptdiagonale des reduzierten Systems ≠ Ø sind./*

```
SET #EQUAT ← Ø
FOR 1 ≦ K ≦ #ROWS DO:
   IF SYSTEM-MATRIX(K,K) = Ø THEN
     LET #EQUAT ← K
     FOR 1 ≦ L ≦ #ROWS DO:
        CHANGE COLUMN(K), I.E. SYSTEM-MATRIX(L,K) WITH
        COLUMN(#COLUMNS),I.E. SYSTEM-MATRIX(L,#COLUMNS)
     END
   ENDIF
END
```

2. */Auflösen des Systems/*

```
SET SOLUTION(#COLUMNS) ← 1
FOR #COLUMNS-1 ≧ J ≧ 1 DO:
   SOLUTION(J) = (-1)*SYSTEM-MATRIX(J,#COLUMNS)/SYSTEM-MATRIX(J,J)
   CALL SIMPLI      (SOLUTION(J))
   FOR J-1 ≧ K ≧ 1 DO:
      SET SOLUTION(J) IN SYSTEM-MATRIX(K,J) AND SUM UP THE RESULTING
      CONSTANT TERMS IN SYSTEM-MATRIX(K,#COLUMNS)
   END
END
```

3. */ Prüfe, ob der Lösungsvektor umgeordnet werden muß (ja, falls Spaltenvertauschung unter 1. stattgefunden hat)./*

```
IF #EQUAT > Ø THEN
  CHANGE PLACES OF SOLUTION(#EQUAT) AND SOLUTION(#COLUMNS)
ENDIF

RETURN
```

TEST: SUBROUTINE: *Prüfe, ob die gefundene Lösung relevant ist (d.h. eine Wand repräsentiert). Falls ja, finde eventuelle weitere Kantenvektoren, so daß das Skalarprodukt mit dem Lösungsvektor verschwindet.*

1.
```
FOR 1 ≤ K ≤ #EDGE-VECTORS DO
   SET TESTARRAY Y(K,1), Y(K,2), Y(K,4), Y(K,5) ← Ø
   SET TESTARRAY Y(K,3) ← 1
END
```

2. */Berechne Skalarprodukt/*

```
FOR 1 ≤ K ≤ #EDGE-VECTORS DO:
   FOR 1 ≤ J ≤ SPACE-DIMENSION DO:
      MULTIPLY THE COMPONENT J OF THE SOLUTION-VECTOR WITH
      COMPONENT J OF EDGE-VECTOR(K)
      ADD RESULT TO TESTARRAY Y(K,*)
   END
   SET TESTARRAY Y(K,4) ← (Y(K,1)+Y(K,2)*SQRT(D))/Y(K,3)
   SET TESTARRAY Y(K,5) ←  K
END
```

3. */Vorzeichentest der Skalarprodukte in (Y(*,4)/*

```
SET NEGATIV-FLAG ← Ø
SET NULL-FLAG ← Ø
SET POSITIV-FLAG ← Ø
FOR 1 ≤ K ≤ #EDGE-VECTORS DO:
   IF TESTARRAY Y(K,4) < Ø  LET NEGATIV-FLAG ← 1
   IF TESTARRAY Y(K,4) = Ø  LET POSITIV-FLAG ← 1
   IF TESTARRAY Y(K,4) > Ø  LET POSITIV-FLAG ← 1
END
IF (NEGATIV-FLAG - POSITIV-FLAG) = Ø  RETURN
ELSE          /d.h. der Lösungsvektor ist relevant/
```

```
4.  /Ausgabe der Ergebnisse/

    LET #OUTPUT-RECORDS ← OUTPUT-RECORDS+1
    WRITE OUTPUT-FILE:     - ARRAY-OF-NUMBERS
                           - THE SOLUTION-VECTOR
    FOR 1 ≦ K ≦ #EDGE-VECTORS DO:
       IF TESTARRAY Y(K,4) = Ø  WRITE: THE NUMBER OF THE EDGE-VECTOR
                                       Y(K,5)
    END

    RETURN


    SIMPLI: SUBROUTINE: Kürzen von  C^-1 (A+B√D)

    ARGUMENTS:  COMPONENTS C, A, B
    RETURNS:    SIMPLIFIED COMPONENTS C, A, B
    LET TRANSIENT(1) ← C
    LET TRANSIENT(2) ← A
    LET TRANSIENT(3) ← B
    FOR 13 ≧ Q ≧ 2 DO:
       LET STOP-FLAG ← Ø
  1.  LET SUCCESSFULLY SIMPLIFIED FLAGS: S(1), S(2), S(3) ← 1
       FOR 1 ≦ INDEX ≦ 3 DO:
          DIVIDE TRANSIENT(INDEX) BY Q
          TEST IF THERE WAS A REMAINDER
          IF THERE WAS NO REMAINDER LET S(INDEX) ← Ø
       END

       LET SUM-FLAGS ← S(1) + S(2) + S(3)
       /Wenn SUM-FLAGS = Ø, dann ist das Kürzen aller Komponenten
        durch Q möglich/
       IF SUM-FLAG = Ø FOR 1 ≦ INDEX ≦ 3 DO:
         LET TRANSIENT(INDEX) ← TRANSIENT(INDEX)/Q
         END
         IF SUM-FLAG > Ø LET STOP-FLAG ← 1
         IF STOP-FLAG = Ø GOTO 1.      /Erneutes Kürzen durch das
                                        gleiche Q/
         END
         LET C ← TRANSIENT(1)
         LET A ← TRANSIENT(2)
         LET B ← TRANSIENT(3)
```

IV. Binäre vollkommene Formen über $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, d=2,3,5, und elliptische Fixpunkte der Hilbert'schen Modulgruppe

1. Die Formen ϕ_0 und ϕ_I über $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$

a) Die Form ϕ_0 und ihre Nachbarformen

Es ist $e = 1 + \sqrt{2}$ die Grundeinheit von $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$

Nach Satz III.2.1 ist die Form $\underline{\phi_0(\underline{x}) = e\sqrt{2}(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)}$ vollkommen.

Es ist $\mu(\phi_0) = 4$ und $\underline{M(\phi_0)} = \{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\bar{e}\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\\bar{e}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\bar{e}\\-\bar{e}\end{bmatrix}\}$.

Zu $\underline{m} \in M(\phi_0)$ bilden wir die Matrizen $\underline{m}\cdot\underline{m}^t$:

$$\underline{m}_1\cdot\underline{m}_1^t = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}, \quad \underline{m}_2\cdot\underline{m}_2^t = \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}, \quad \underline{m}_3\cdot\underline{m}_3^t = \begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix},$$

$$\underline{m}_4\cdot\underline{m}_4^t = \begin{bmatrix}\bar{e}^2 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}, \quad \underline{m}_5\cdot\underline{m}_5^t = \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & \bar{e}^2\end{bmatrix}, \quad \underline{m}_6\cdot\underline{m}_6^t = \begin{bmatrix}\bar{e}^2 & -\bar{e}^2\\-\bar{e}^2 & \bar{e}^2\end{bmatrix}$$

und die Kantenformen $\hat{\ell}_k^2 = \underline{\hat{m}_k\cdot\underline{m}_k^t}$ von P_{ϕ_0}, $k = 1,\ldots,6$.

Da die Anzahl der Kanten von P_{ϕ_0} mit der Dimension von $Y_K^{(2)}$ übereinstimmt, ist P_{ϕ_0} durch 6 Ungleichungen $\psi_k(\hat{q}) \geq 0$ bestimmt, d.h. P_{ϕ_0} bestitzt genau 6 Wände W_k, welche man entweder durch Koeffizientenvergleich (siehe Seite 32) oder mit Hilfe des Computer-Algorithmus erhält:

W_1: $\quad \psi_1(\hat{q}) = e^2q_{11} + e^2q_{12} - \bar{e}^2\bar{q}_{11} - \bar{e}^2\bar{q}_{12} = 0$

W_2: $\quad \psi_2(\hat{q}) = e^2q_{12} + e^2q_{22} - \bar{e}^2\bar{q}_{12} - \bar{e}^2\bar{q}_{22} = 0$

W_3: $\quad \psi_3(\hat{q}) = -e^2q_{12} + \bar{e}^2\bar{q}_{12} = 0$

W_4: $\psi_4(\hat{q}) = -q_{11} - q_{12} + \bar{q}_{11} + \bar{q}_{12} = 0$

W_5: $\psi_5(\hat{q}) = -q_{12} - q_{22} + \bar{q}_{12} + \bar{q}_{22} = 0$

W_6: $\psi_6(\hat{q}) = q_{12} - \bar{q}_{12} = 0$.

Bezeichnet man mit K_k die zu der Kantenform $\hat{\ell}_k^2$ gehörende Kante $\mathbb{R}^{\geq 0} \cdot \hat{\ell}_k^2$, so liegen in den Wänden $W_1, \ldots, W_6$ jeweils folgende Kanten:

W_1: $(K_2, K_3, K_4, K_5, K_6)$

W_2: $(K_1, K_3, K_4, K_5, K_6)$

W_3: $(K_1, K_2, K_4, K_5, K_6)$

W_4: $(K_1, K_2, K_3, K_5, K_6)$

W_5: $(K_1, K_2, K_3, K_4, K_6)$

W_6: $(K_1, K_2, K_3, K_4, K_5)$.

Es ist der elliptische Fixpunkt $\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3} =: \tau_0$ dritter Ordnung der Hilbert'schen Modulgruppe zu $\mathbb{Q}\sqrt{2}$ die Wurzel von ϕ_0. Man erhält so nach II.2 die Menge der Automorphismen von ϕ_0:

$$\left\{ \pm \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \pm \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \pm \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \pm \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \pm \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \pm \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \right\}$$

und damit modulo ± 1 die Automorphismengruppe

$$\underline{\mathrm{Aut}(\phi_0)} = \langle v, w;\ v^3 = w^2 = 1,\ vw = wv^{-1} \rangle$$

mit $v = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ und $w = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, d.h. $\mathrm{Aut}(\phi_0)$ isomorph der Diedergruppe D_3.

Hieraus errechnet sich nach III.1, S.26 der Stabilisator Γ_{ϕ_0} von P_{ϕ_0}:

$$\Gamma_{\phi_0} = \langle \tilde{v}, \tilde{w};\ \tilde{v}^3 = \tilde{w}^2 = 1,\ \tilde{v}\tilde{w} = \tilde{w}\tilde{v}^{-1} \rangle \quad \text{mit } \tilde{v} = v^t \text{ und } \tilde{w} = w^t$$

$$\cong D_3 .$$

Unter Γ_{ϕ_0} zerfällt die Menge der Kanten von P_{ϕ_0} in zwei Bahnen B_i:

$B_1 = \{K_1, K_2, K_3\}$, $B_2 = \{K_4, K_5, K_6\}$

und die Menge der Wände in die beiden Bahnen

$C_1 = \{W_1, W_2, W_3\}$, $C_2 = \{W_4, W_5, W_6\}$,

sodaß es höchstens zwei nichtäquivalente Nachbarformen von ϕ_0 geben kann.

Wir wählen als Repräsentanten der Bahnen C_1 und C_2 die Wände W_3 bzw. W_6 und bringen die Linearformen $\hat{\psi}_1(\hat{q})$, $l=3,6$, welche diese Wände bestimmen, auf die Gestalt

$\hat{\psi}_1(\hat{q}) = \sum_{i \leq j} a_{ij}^{(l)} q_{ij} + \sum_{i \leq j} \bar{a}_{ij}^{(l)} \bar{q}_{ij}$, $l=3,6$, indem jeweils mit einer geeigneten Zahl aus $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ (hier: $\sqrt{2}$) multipliziert wird. Mit Hilfe der zugehörigen quadratischen Formen $\hat{\psi}_l(\hat{\underline{x}})$, $l = 3,6$:

$\hat{\psi}_3(\hat{\underline{x}}) = -e^2\sqrt{2}\, x_1x_2 + \bar{e}^2\sqrt{2}\, \bar{x}_1\bar{x}_2$

$\hat{\psi}_6(\hat{\underline{x}}) = \sqrt{2}\, x_1x_2 - \sqrt{2}\, \bar{x}_1\bar{x}_2$

werden die Nachbarformen

$\hat{v}_l(\hat{\underline{x}}) = \hat{\phi}_0(\hat{\underline{x}}) + \delta_l\hat{\psi}_l(\hat{\underline{x}})$, $\delta_l e\, \mathbb{Q}^{>0}$, $l = 3,6$, von ϕ_0 gebildet, und mit $\delta_3 = \delta_6 = 1$ erhalten wir diese explizit:

$v_3(\underline{x}) = e\sqrt{2}\, x_1^2 - 2e\, x_1x_2 + e\sqrt{2}\, x_2^2$

$v_6(\underline{x}) = e\sqrt{2}\, x_1^2 + 2e\, x_1x_2 + e\sqrt{2}\, x_2^2$.

Es ist $v_3 \sim v_6$ (Transformationsmatrix $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$) und daher sämtliche Nachbarformen von ϕ_0 untereinander äquivalent. Da $\det(\phi_0) = \frac{2}{3}e^2$ und $\det(v_6) = e^2$, sind die Formen ϕ_0 und v_6 nicht äquivalent.

$\underline{\phi_I := e\sqrt{2}\, x_1^2 + 2e\, x_1x_2 + e\sqrt{2}\, x_2^2} = v_6$ ist somit Repräsentant einer weiteren Klasse vollkommener binärer Formen über $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

b) Die Form ϕ_I und ihre Nachbarformen

Es ist

$$\underline{M(\phi_I)} = \{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-\sqrt{2}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-\sqrt{2}\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\\bar{e}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\bar{e}\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\bar{e}\\\bar{e}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\bar{e}\\0\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}0\\\bar{e}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-\bar{e}\sqrt{2}\\\bar{e}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\bar{e}\\-\bar{e}\sqrt{2}\end{bmatrix}\}.$$

Zu $\underline{m} \in M(\phi_I)$ bilden wir die Matrizen $\underline{m}\cdot\underline{m}^t$:

$$\underline{m}_1\cdot\underline{m}_1^t = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}, \quad \underline{m}_2\cdot\underline{m}_2^t = \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}, \quad \underline{m}_3\cdot\underline{m}_3^t = \begin{bmatrix}1 & -\sqrt{2}\\-\sqrt{2} & 2\end{bmatrix},$$

$$\underline{m}_4\cdot\underline{m}_4^t = \begin{bmatrix}2 & -\sqrt{2}\\-\sqrt{2} & 1\end{bmatrix}, \quad \underline{m}_5\cdot\underline{m}_5^t = \begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix}, \quad \underline{m}_6\cdot\underline{m}_6^t = \begin{bmatrix}1 & \bar{e}\\\bar{e} & \bar{e}^2\end{bmatrix},$$

$$\underline{m}_7\cdot\underline{m}_7^t = \begin{bmatrix}\bar{e}^2 & \bar{e}\\\bar{e} & 1\end{bmatrix}, \quad \underline{m}_8\cdot\underline{m}_8^t = \begin{bmatrix}\bar{e}^2 & \bar{e}^2\\\bar{e}^2 & \bar{e}^2\end{bmatrix}, \quad \underline{m}_9\cdot\underline{m}_9^t = \begin{bmatrix}\bar{e}^2 & 0\\0 & 0\end{bmatrix},$$

$$\underline{m}_{10}\cdot\underline{m}_{10}^t = \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & \bar{e}^2\end{bmatrix}, \quad \underline{m}_{11}\cdot\underline{m}_{11}^t = \begin{bmatrix}2\bar{e}^2 & -\bar{e}^2\sqrt{2}\\-\bar{e}^2\sqrt{2} & \bar{e}^2\end{bmatrix}, \quad \underline{m}_{12}\cdot\underline{m}_{12}^t = \begin{bmatrix}\bar{e}^2 & -\bar{e}^2\sqrt{2}\\-\bar{e}^2\sqrt{2} & 2\bar{e}^2\end{bmatrix}$$

und die Kantenformen $\hat{\ell}_k^2 = \widehat{\underline{m}_k\cdot\underline{m}_k^t}$ von P_{ϕ_I}, $k = 1,\ldots,12$.

Zur Bestimmung der Linearformen $\psi_1(\hat{q})$, welche die Wände von P_{ϕ_I} festlegen, wird der Computer-Algorithmus aus III.3 eingesetzt, da hier wegen $\rho = s-2N = 12-6 = 6$ die Methode des Koeffizientenvergleichs und Eliminierens von Parametern versagt.

Das Computer-Ergebnis zeigt, daß P_{ϕ_I} 24 Wände besitzt:

W_1: $\quad \psi_1(\hat{q}) = -q_{11} + \bar{q}_{11}$

W_2: $\quad \psi_2(\hat{q}) = -q_{22} + \bar{q}_{22}$

W_3: $\quad \psi_3(\hat{q}) = -2q_{11} - 2\sqrt{2}\,q_{12} - q_{22}$

$\qquad\qquad + 2\bar{q}_{11} - 2\sqrt{2}\,\bar{q}_{12} + \bar{q}_{22} = 0$

$$W_4: \quad \psi_4(\hat{q}) = -\frac{1}{2}q_{11} - \sqrt{2}\,q_{12} - q_{22} + \frac{1}{2}\bar{q}_{11} - \sqrt{2}\,\bar{q}_{12} + \bar{q}_{22} = 0$$

$$W_5: \quad \psi_5(\hat{q}) = e^2 q_{22} - \bar{e}^2\bar{q}_{22} = 0$$

$$W_6: \quad \psi_6(\hat{q}) = e^2 q_{11} - \bar{e}^2\bar{q}_{11} = 0$$

$$W_7: \quad \psi_7(\hat{q}) = e^2 q_{11} - e^2\sqrt{2}\,q_{12} + \frac{1}{2}e^2 q_{22} - \bar{e}^2\bar{q}_{11} + \bar{e}^2\sqrt{2}\,\bar{q}_{12} - \frac{1}{2}\bar{e}^2\bar{q}_{22} = 0$$

$$W_8: \quad \psi_8(\hat{q}) = \frac{1}{2}e^2 q_{11} + e^2\sqrt{2}\,q_{12} + e^2 q_{22} - \frac{1}{2}\bar{e}^2\bar{q}_{11} + \bar{e}^2\sqrt{2}\,\bar{q}_{12} - \bar{e}^2\bar{q}_{22} = 0$$

$$W_9: \quad \psi_9(\hat{q}) = -\frac{1}{2}q_{11} - eq_{12} - \frac{1}{2}\bar{q}_{11} + \overline{eq}_{12} = 0$$

$$W_{10}: \quad \psi_{10}(\hat{q}) = -2eq_{12} - q_{22} + 2\overline{eq}_{12} + \bar{q}_{22} = 0$$

$$W_{11}: \quad \psi_{11}(\hat{q}) = 2eq_{12} + e^2 q_{22} - 2\bar{e}q_{12} - \bar{e}^2\bar{q}_{22} = 0$$

$$W_{12}: \quad \psi_{12}(\hat{q}) = -\frac{1}{2}q_{11} + q_{12} + eq_{22} + \frac{1}{2}\bar{q}_{11} - \bar{q}_{12} - \overline{eq}_{22} = 0$$

$$W_{13}: \quad \psi_{13}(\hat{q}) = e^2 q_{11} + 2eq_{12} - \bar{e}^2\bar{q}_{11} - 2\overline{eq}_{12} = 0$$

$$W_{14}: \quad \psi_{14}(\hat{q}) = 2eq_{11} + 2q_{12} - q_{22} - 2\overline{eq}_{11} - 2\bar{q}_{12} + \bar{q}_{22} = 0$$

$$W_{15}: \quad \psi_{15}(\hat{q}) = 2eq_{11} + 2e^2 q_{12} + e^2 q_{22} - 2\overline{eq}_{11} - 2\bar{e}^2\bar{q}_{12} - \bar{e}^2\bar{q}_{22} = 0$$

$$W_{16}: \quad \psi_{16}(\hat{q}) = \frac{1}{2}e^2 q_{11} + e^2 q_{12} + eq_{22} - \frac{1}{2}\bar{e}^2\bar{q}_{11} - \bar{e}^2\bar{q}_{12} - \overline{eq}_{22} = 0$$

$$W_{17}: \quad \psi_{17}(\hat{q}) = -q_{12} + \bar{q}_{12} = 0$$

$$W_{18}: \quad \psi_{18}(\hat{q}) = -e^2 q_{12} + \bar{e}^2\bar{q}_{12} = 0$$

$$W_{19}: \quad \psi_{19}(\hat{q}) = \frac{1}{2}e^2\sqrt{2}\,q_{12} + e^2 q_{22} - \frac{1}{2}\bar{e}^2\sqrt{2}\,\bar{q}_{12} + \bar{e}^2\bar{q}_{22} = 0$$

W_{20}: $\psi_{20}(\hat{q}) = \frac{1}{2}\sqrt{2}\, q_{12} + q_{22} - \frac{1}{2}\sqrt{2}\, \bar{q}_{12} + \bar{q}_{22} = 0$

W_{21}: $\psi_{21}(\hat{q}) = 2q_{11} + \sqrt{2}\, q_{12} + 2\bar{q}_{11} - \sqrt{2}\, \bar{q}_{12} = 0$

W_{22}: $\psi_{22}(\hat{q}) = e^2\sqrt{2}\, q_{11} + e^2 q_{12} + \bar{e}^2\sqrt{2}\, \bar{q}_{11} - \bar{e}^2\bar{q}_{12} = 0$

W_{23}: $\psi_{23}(\hat{q}) = e^2 q_{11} + \frac{3}{2}e^2\sqrt{2}\, q_{12} + e^2 q_{22} + \bar{e}^2\bar{q}_{11} - \frac{3}{2}\bar{e}^2\sqrt{2}\, \bar{q}_{12} + \bar{e}^2\bar{q}_{22} = 0$

W_{24}: $\psi_{24}(\hat{q}) = q_{11} + \frac{3}{2}\sqrt{2}\, q_{12} + q_{22} + \bar{q}_{11} - \frac{3}{2}\sqrt{2}\, \bar{q}_{12} + \bar{q}_{22} = 0$.

In den Wänden liegen jeweils folgende Kanten K_k ($\leftrightarrow \hat{\ell}_k^2$):

W_1: $(K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6, K_{10})$

W_2: $(K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_7, K_9)$

W_3: $(K_1, K_2, K_3, K_4, K_6, K_8, K_{12})$

W_4: $(K_1, K_2, K_3, K_4\ K_7, K_8, K_{11})$

W_5: $(K_1, K_6, K_8, K_9, K_{10}, K_{11}, K_{12})$

W_6: $(K_2, K_7, K_8, K_9, K_{10}, K_{11}, K_{12})$

W_7: $(K_3, K_5, K_7, K_9, K_{10}, K_{11}, K_{12})$

W_8: $(K_4, K_5, K_6, K_9, K_{10}, K_{11}, K_{12})$

W_9: $(K_1, K_2, K_6, K_8, K_{10}, K_{12})$

W_{10}: $(K_1, K_2, K_7, K_8, K_9, K_{11})$

W_{11}: $(K_1, K_4, K_5, K_6, K_9, K_{10})$

W_{12}: $(K_1, K_4, K_6, K_8, K_{11}, K_{12})$

W_{13}: $(K_2, K_3, K_5, K_7, K_9, K_{10})$

W_{14}: $(K_2, K_3, K_7, K_8, K_{11}, K_{12})$

W_{15}: $(K_3, K_4, K_5, K_6, K_{10}, K_{12})$

W_{16}: $(K_3, K_4, K_5, K_7, K_9, K_{11})$

W_{17}: $(K_1, K_2, K_5, K_9, K_{10})$

W_{18}: $(K_1, K_2, K_8, K_9, K_{10})$

W_{19}: $(K_1, K_4, K_6, K_9, K_{11})$

W_{20}: $(K_1, K_4, K_7, K_9, K_{11})$

W_{21}: $(K_2, K_3, K_6, K_{10}, K_{12})$

W_{22}: $(K_2, K_3, K_7, K_{10}, K_{12})$

W_{23}: $(K_3, K_4, K_5, K_{11}, K_{12})$

W_{24}: $(K_3, K_4, K_8, K_{11}, K_{12})$

Die Wurzel der Form ϕ_I ist der elliptische Fixpunkt $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{|\sqrt{2}|} =: \tau_1$ vierter Ordnung der Hilbert'schen Modulgruppe zu $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, und man erhält nach II.2 die Menge der Automorphismen von ϕ_I:

$$\{\pm\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, \pm\begin{bmatrix}\sqrt{2} & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}, \pm\begin{bmatrix}1 & \sqrt{2}\\ -\sqrt{2} & -1\end{bmatrix}, \pm\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -\sqrt{2}\end{bmatrix}, \pm\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix},$$

$$\pm\begin{bmatrix}1 & \sqrt{2}\\ 0 & -1\end{bmatrix}, \pm\begin{bmatrix}\sqrt{2} & 1\\ -1 & -\sqrt{2}\end{bmatrix}, \pm\begin{bmatrix}1 & 0\\ -\sqrt{2} & -1\end{bmatrix}\},$$

d.h. modulo ± 1 die Automorphismengruppe

$$\underline{\mathrm{Aut}(\phi_I)} = \langle v,w;\ v^4 = w^2 = 1,\ vw = wv^{-1}\rangle \quad \text{mit } v = \begin{bmatrix}\sqrt{2} & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$$

$$\text{und } w = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$\cong D_4.$$

Hieraus errechnet sich der Stabilisator Γ_{ϕ_I} von P_{ϕ_I}:

$$\Gamma_{\phi_I} = \langle \tilde{v}, \tilde{w};\ \tilde{v}^4 = \tilde{w}^4 = 1,\ \tilde{v}\tilde{w} = \tilde{w}\tilde{v}^{-1}\rangle \quad \text{mit } \tilde{v} = v^t \text{ und}$$

$$\tilde{w} = w^t$$

$$\cong D_4.$$

Unter Γ_{ϕ_I} zerfällt die Menge der Kanten von P_{ϕ_I} in drei Bahnen B_i:

$$B_1 = \{K_1, K_2, K_3, K_4\},\ B_2 = \{K_5, K_6, K_7, K_8\},\ B_3 = \{K_9, K_{10}, K_{11}, K_{12}\}$$

und die Menge der Wände in fünf Bahnen C_i:

$C_1 = \{W_1, W_2, W_3, W_4\}$, $C_2 = \{W_5, W_6, W_7, W_8\}$,
$C_3 = \{W_9, W_{10}, W_{11}, W_{12}, W_{13}, W_{14}, W_{15}, W_{16}\}$,
$C_4 = \{W_{18}, W_{19}, W_{22}, W_{23}\}$ und
$C_5 = \{W_{17}, W_{20}, W_{21}, W_{24}\}$.

Es kann daher höchstens fünf nichtäquivalente Nachbarformen

$$\hat{v}_1(\hat{\underline{x}}) = \hat{\phi}_I(\hat{\underline{x}}) + \delta_1 \hat{\psi}_1(\hat{\underline{x}})$$

von ϕ_I geben.

Wir wählen als Repräsentant der Bahn C_1 die Wand W_3, bilden anhand der Linearform $\hat{\psi}_3(\hat{q}) = \sqrt{2}\psi_3(\hat{q})$ die quadratische Form

$$\hat{\psi}_3(\hat{\underline{x}}) = -2\sqrt{2}\, x_1^2 - 4x_1x_2 - \sqrt{2}\, x_2^2 + 2\sqrt{2}\, \bar{x}_1^2 - 4\, \bar{x}_1\bar{x}_2 + \sqrt{2}\, \bar{x}_2^2$$

und erhalten mit $\delta_3 = 1$ die Nachbarform

$$v_3(\underline{x}) = \bar{e}\sqrt{2}\, x_1^2 - 2\bar{e}x_1x_2 + 2x_2^2.$$

Es ist $T^t\phi_I T = v_3$, $T = \begin{bmatrix} \bar{e} & -\bar{e} \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, d.h. $v_3 \sim \phi_I$.

W_7 sei Repräsentant der Bahn C_2. Wir bilden anhand der Linearform $\hat{\psi}_7(\hat{q}) = \sqrt{2}\, \psi_7(\hat{q})$ die quadratische Form

$$\hat{\psi}_7(\hat{\underline{x}}) = e^2\sqrt{2}\, x_1^2 + 2e^2x_1x_2 + \tfrac{1}{2}e^2\sqrt{2}\, x_2^2 - \bar{e}^2\sqrt{2}\, \bar{x}_1^2 + 2\bar{e}^2\bar{x}_1\bar{x}_2 - \tfrac{1}{2}\bar{e}^2\sqrt{2}\, \bar{x}_2^2$$

und erhalten mit $\delta_7 = 2$ die Nachbarform

$$v_7(\underline{x}) = e^2(e\sqrt{2}\, x_1^2 + 2ex_1x_2 + 2x_2^2).$$

Es ist $T^t\phi_I T = v_7$, $T = \begin{bmatrix} e & e \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, d.h. $v_7 \sim \phi_I$.

W_9 sei Repräsentant der Bahn C_3. Anhand der Linearform

$\hat{\psi}_9(\hat{q}) = \sqrt{2}\ \psi_9(\hat{q})$ erhält man die quadratische Form

$\hat{\psi}_9(\hat{\underline{x}}) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}\ x_1^2 - e\sqrt{2}\ x_1x_2 + \frac{1}{2}\sqrt{2}\ \bar{x}_1^2 + \bar{e}\sqrt{2}\ \bar{x}_1\bar{x}_2$

und mit $\delta_9 = 2$ die Nachbarform

$v_9(\underline{x}) = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + e\sqrt{2}\ x_2^2.$

Es ist $T^t\phi_I T = v_9$, $T = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, d.h. $v_9 \sim \phi_I$.

W_{18} sei Repräsentant der Bahn C_4. Anhand der Linearform $\hat{\psi}_{18}(\hat{q}) = \sqrt{2}\ \psi_{18}(\hat{q})$ erhält man die quadratische Form

$\hat{\psi}_{18}(\hat{\underline{x}}) = -e^2\sqrt{2}\ x_1x_2 + \bar{e}^2\sqrt{2}\ \bar{x}_1\bar{x}_2$

und mit $\delta_{18} = 1$ die Nachbarform

$v_{18}(\underline{x}) = e\sqrt{2}\ x_1^2 - e\sqrt{2}\ x_1x_2 + e\sqrt{2}\ x_2^2.$

Diese ist offensichtlich äquivalent zu ϕ_o.

Als Repräsentant der Bahn C_5 betrachten wir die Wand W_{17}. Da W_{17} die gemeinsame Wand von P_{ϕ_o} und P_{ϕ_I} ist, ist $v_{17}(\underline{x}) = \phi_o(\underline{x})$.

Damit ist bewiesen:

1.1 Satz: Über $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ existieren genau zwei Klassen vollkommener binärer quadratischer Formen.
(Repräsentanten: ϕ_o und ϕ_I)

1.2 Bemerkung:

In [8] sind folgende nicht-äquivalente elliptische Fixpunkte der Hilbert'schen Modulgruppe zu $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ mit der Ordnung ≥ 3 angegeben:

$$\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3} \qquad = \tau_0$$

$$\frac{1}{2}e + \frac{i}{|2e|}\sqrt{3} \qquad =: \tau_0' \quad , \quad \text{Ord } \tau_0 = \text{Ord } \tau_0' = 3 \ ;$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \qquad = \tau_1$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{|e\sqrt{2}|} \qquad =: \tau_1' \quad , \quad \text{Ord } \tau_1 = \text{Ord } \tau_1' = 4.$$

Bezüglich der Gruppe $GL(2,\mathcal{O}_2)$ ist $\tau_0 \sim \tau_0'$ und $\tau_1 \sim \tau_1'$, und zu äquivalenten Punkten gehören äquivalente positiv definite binäre Formen (vgl. Seite 13).

Die zu τ_0 und τ_1 gehörenden quadratischen Formen sind: $q_0(\underline{x}) = r(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)$ und $q_1(\underline{x}) = r(x_2^2 + \sqrt{2}\, x_1x_2 + x_2^2)$, $r \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $r >> 0$. Man erhält für jeweils $r = e\sqrt{2}$ die vollkommenen Formen $\phi_0(\underline{x})$ und $\phi_I(\underline{x})$.

2. Die Formen ϕ_o, ϕ_I und ϕ_{II} über $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$

a) Die Form ϕ_o und ihre Nachbarformen

Die Grundeinheit von $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ ist $e = 2 + \sqrt{3}$.

Nach Satz III.2.1 ist die Form $\phi_o(\underline{x}) = e(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)$ vollkommen.

Es ist $\mu(\phi_o) = 4$ und

$$\underline{M(\phi_o)} = \{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\bar{e}-1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\\bar{e}-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\bar{e}-1\\1-\bar{e}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\bar{e}\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\\bar{e}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\bar{e}\\-\bar{e}\end{bmatrix}\}$$

Zu $\underline{m} \in M(\phi_o)$ bilden wir die Matrizen $\underline{m}\cdot\underline{m}^t$:

$$\underline{m}_1\cdot\underline{m}_1^t = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}, \quad \underline{m}_2\cdot\underline{m}_2^t = \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}, \quad \underline{m}_3\cdot\underline{m}_3 = \begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix},$$

$$\underline{m}_4\cdot\underline{m}_4^t = \begin{bmatrix}2\bar{e} & 0\\0 & 0\end{bmatrix}, \quad \underline{m}_5\cdot\underline{m}_5^t = \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 2\bar{e}\end{bmatrix}, \quad \underline{m}_6\cdot\underline{m}_6^t = \begin{bmatrix}2\bar{e} & -2\bar{e}\\-2\bar{e} & 2\bar{e}\end{bmatrix},$$

$$\underline{m}_7\cdot\underline{m}_7^t = \begin{bmatrix}\bar{e}^2 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}, \quad \underline{m}_8\cdot\underline{m}_8^t = \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & \bar{e}^2\end{bmatrix}, \quad \underline{m}_9\cdot\underline{m}_9^t = \begin{bmatrix}\bar{e}^2 & -\bar{e}^2\\-\bar{e}^2 & \bar{e}^2\end{bmatrix}$$

und die Kantenformen $\hat{\ell}_k^2 = \widehat{\underline{m}_k\cdot\underline{m}_k^t}$ von P_{ϕ_o}, $k = 1,\ldots,9$.

Mit Hilfe des Computer-Algorithmus (hier würde auch Koeffizientenvergleich und Eliminierung von Parametern (Seite 32) zum Ziel führen), stellt man fest, daß P_{ϕ_o} durch 6 Ungleichungen $\psi_1(\hat{q}) \geq 0$ bestimmt ist, d.h. die folgenden 6 Wände besitzt:

W_1: $\psi_1(\hat{q}) = q_{12} - \bar{q}_{12} = 0$

W_2: $\psi_2(\hat{q}) = -q_{12} - q_{22} + \bar{q}_{12} + \bar{q}_{22} = 0$

W_3: $\psi_3(\hat{q}) = -q_{11} - q_{12} + \bar{q}_{11} + \bar{q}_{12} = 0$

W_4: $\psi_4(\hat{q}) = -e^2 q_{12} + \bar{e}^2 \bar{q}_{12} = 0$

W_5: $\psi_5(\hat{q}) = e^2 q_{12} + e^2 q_{22} - \bar{e}^2 \bar{q}_{12} - \bar{e}^2 \bar{q}_{22} = 0$

W_6: $\psi_6(\hat{q}) = e^2 q_{11} + e^2 q_{12} - \bar{e}^2 \bar{q}_{11} - \bar{e}^2 \bar{q}_{12} = 0$.

In den Wänden liegen jeweils folgende Kanten K_k ($\langle\!\rightarrow \hat{\ell}_k^2$):

W_1: $(K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_7, K_8)$

W_2: $(K_1, K_2, K_3, K_4, K_6, K_7, K_9)$

W_3: $(K_1, K_2, K_3, K_5, K_6, K_8, K_9)$

W_4: $(K_1, K_2, K_4, K_5, K_7, K_8, K_9)$

W_5: $(K_1, K_3, K_4, K_6, K_7, K_8, K_9)$

W_6: $(K_2, K_3, K_5, K_6, K_7, K_8, K_9)$.

Die Form ϕ_o hat als Wurzel den elliptischen Fixpunkt dritter Ordnung $\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3} =: \tau_o$ der Hilbert'schen Modulgruppe zu $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$.

Die Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(\phi_o)$ stimmt elementweise mit der Automorphismengruppe der Form ϕ_o über $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ überein; das gleiche gilt für den Stabilisator Γ_{ϕ_o} von P_{ϕ_o}, d.h. es ist $\underline{\mathrm{Aut}(\phi_o)} \cong D_3 \cong \Gamma_{\phi_o}$.

Unter Γ_{ϕ_o} zerfällt die Menge der Kanten in 3 Bahnen B_i:

$B_1 = \{K_1, K_2, K_3\}$, $B_2 = \{K_4, K_5, K_6\}$, $B_3 = \{K_7, K_8, K_9\}$ und die Menge der Wände in 2 Bahnen C_i:

$C_1 = \{W_1, W_2, W_3\}$, $C_2 = \{W_4, W_5, W_6\}$.

Es können daher höchstens zwei zu ϕ_o nicht-äquivalente Nachbarformen

$$\hat{v}_1(\hat{\underline{x}}) = \hat{\phi}_o(\hat{\underline{x}}) + \delta_1 \hat{\psi}_1(\hat{\underline{x}})$$

auftreten.

W_1 sei Repräsentant der Bahn C_1. Anhand der Linearform $\hat{\psi}_1(\hat{q}) = \sqrt{3}\,\psi_1(\hat{q})$ und der zugehörigen quadratischen Form $\hat{\psi}_1(\hat{\underline{x}}) = \sqrt{3}\,x_1x_2 - \sqrt{3}\,\bar{x}_1\bar{x}_2$ erhalten wir mit $\delta_1 = \frac{1}{3}$ die Nachbarform

$$v_1(\underline{x}) = e(x_1^2 + \tfrac{2}{3}\sqrt{3}\,x_1x_2 + x_2^2).$$

W_4 sei Repräsentant der Bahn C_2. Anhand der Linearform $\hat{\psi}_4(\hat{q}) = \sqrt{3}\,\psi_4(\hat{q})$ und der zugehörigen quadratischen Form $\hat{\psi}_4(\hat{\underline{x}}) = -e^2\sqrt{3}\,x_1x_2 + \bar{e}^2\sqrt{3}\,\bar{x}_1\bar{x}_2$ erhält man mit $\delta_4 = \frac{1}{3}$ die Nachbarform

$$v_4(\underline{x}) = e(x_1^2 - \tfrac{2}{3}\sqrt{3}\,x_1x_2 + x_2^2).$$

Es ist $v_1 \sim v_4$ und somit sämtliche Nachbarformen von ϕ_0 untereinander äquivalent.

Jedoch ist $v_1 \nmid \phi_0$ ($\det(\phi_0) = \frac{3}{4}e^2$, $\det(v_1) = \frac{2}{3}e^2$), d.h. $\underline{\phi_I := e(x_1^2 + \tfrac{2}{3}\sqrt{3}\,x_1x_2 + x_2^2) = v_1(\underline{x})}$ ist Repräsentant einer weiteren Klasse über $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ vollkommener binärer Formen.

b) Die Form ϕ_I und ihre Nachbarformen

Es ist $\underline{M(\phi_I)} = \{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\bar{e}-1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\\bar{e}-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\bar{e}-1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\\bar{e}-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\bar{e}\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\\bar{e}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\bar{e}-1\\\bar{e}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\bar{e}\\\bar{e}-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\bar{e}\\\bar{e}\end{bmatrix}\}$.

Zu $\underline{m} \in M(\phi_I)$ bilden wir die Matrizen $\underline{m}\cdot\underline{m}^t$:

$$\underline{m}_1\cdot\underline{m}_1^t = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}, \quad \underline{m}_2\cdot\underline{m}_2^t = \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}, \quad \underline{m}_3\cdot\underline{m}_3^t = \begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix},$$

$$\underline{m}_4 \cdot \underline{m}_4^t = \begin{bmatrix} 2\bar{e} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{m}_5 \cdot \underline{m}_5^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2\bar{e} \end{bmatrix}, \quad \underline{m}_6 \cdot \underline{m}_6^t = \begin{bmatrix} 2\bar{e} & \bar{e}-1 \\ \bar{e}-1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\underline{m}_7 \cdot \underline{m}_7^t = \begin{bmatrix} 1 & \bar{e}-1 \\ \bar{e}-1 & 2\bar{e} \end{bmatrix}, \quad \underline{m}_8 \cdot \underline{m}_8^t = \begin{bmatrix} \bar{e}^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{m}_9 \cdot \underline{m}_9^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \bar{e}^2 \end{bmatrix},$$

$$\underline{m}_{10} \cdot \underline{m}_{10}^t = \begin{bmatrix} 2\bar{e} & \bar{e}^2-\bar{e} \\ \bar{e}^2-\bar{e} & \bar{e}^2 \end{bmatrix}, \quad \underline{m}_{11} \cdot \underline{m}_{11}^t = \begin{bmatrix} \bar{e}^2 & \bar{e}^2-\bar{e} \\ \bar{e}^2-\bar{e} & 2\bar{e} \end{bmatrix},$$

$$\underline{m}_{12} \cdot \underline{m}_{12}^t = \begin{bmatrix} \bar{e}^2 & \bar{e}^2 \\ \bar{e}^2 & \bar{e}^2 \end{bmatrix}$$ und die zugehörigen Kantenformen

$\hat{\ell}_k^2 = \underline{\hat{m}}_k \cdot \underline{\hat{m}}_k^t$ von P_{ϕ_I}, $k = 1,\ldots,12$.

Das Ergebnis des Computer-Algorithmus zeigt, daß P_{ϕ_I} 18 Wände besitzt, die durch folgende Gleichungen bestimmt sind:

W_1: $\psi_1(\hat{q}) = 2eq_{12} + e^2 q_{22} - 2\bar{e}\bar{q}_{12} - \bar{e}^2\bar{q}_{22} = 0$

W_2: $\psi_2(\hat{q}) = e^2 q_{11} + 2eq_{12} - \bar{e}^2\bar{q}_{11} - 2\bar{e}\bar{q}_{12} = 0$

W_3: $\psi_3(\hat{q}) = -q_{11} + 2q_{12} - q_{22} + \bar{q}_{11} - 2\bar{q}_{12} + \bar{q}_{22} = 0$

W_4: $\psi_4(\hat{q}) = e^2 q_{11} + 2e^2 q_{12} + e^2 q_{22} - \bar{e}^2\bar{q}_{11} - 2\bar{e}^2\bar{q}_{12} - \bar{e}^2\bar{q}_{22} = 0$

W_5: $\psi_5(\hat{q}) = -q_{12} + \bar{q}_{12} = 0$

W_6: $\psi_6(\hat{q}) = -e^2 q_{12} + \bar{e}^2\bar{q}_{12} = 0$

W_7: $\psi_7(\hat{q}) = -q_{22} + \bar{q}_{22} = 0$

W_8: $\psi_8(\hat{q}) = -q_{11} + \bar{q}_{11} = 0$

W_9: $\psi_9(\hat{q}) = -(e-1)q_{12} - q_{22} + (\bar{e}-1)\bar{q}_{12} + \bar{q}_{22} = 0$

W_{10}: $\psi_{10}(\hat{q}) = -q_{11} - (e-1)q_{12} + \bar{q}_{11} + (\bar{e}-1)\bar{q}_{12} = 0$

W_{11}: $\psi_{11}(\hat{q}) = -2e\sqrt{3}\, q_{12} - q_{22} + 2\bar{e}\sqrt{3}\, \bar{q}_{12} + \bar{q}_{22} = 0$

W_{12}: $\psi_{12}(\hat{q}) = -q_{11} - 2e\sqrt{3}\,q_{12} + \bar{q}_{11} + 2\bar{e}\sqrt{3}\,\bar{q}_{12} = 0$

W_{13}: $\psi_{13}(\hat{q}) = 2e\sqrt{3}\,q_{12} + e^2 q_{22} - 2\bar{e}\sqrt{3}\,\bar{q}_{12} - \bar{e}^2\bar{q}_{22} = 0$

W_{14}: $\psi_{14}(\hat{q}) = e^2 q_{11} + 2e\sqrt{3}\,q_{12} - \bar{e}^2\bar{q}_{11} - 2\bar{e}\sqrt{3}\,\bar{q}_{12} = 0$

W_{15}: $\psi_{15}(\hat{q}) = e^2 q_{22} - \bar{e}^2\bar{q}_{22} = 0$

W_{16}: $\psi_{16}(\hat{q}) = e^2 q_{11} - \bar{e}^2\bar{q}_{11} = 0$

W_{17}: $\psi_{17}(\hat{q}) = (e^2-e)q_{12} + e^2 q_{22} - (\bar{e}^2-\bar{e})\bar{q}_{12} - \bar{e}^2\bar{q}_{22} = 0$

W_{18}: $\psi_{18}(\hat{q}) = e^2 q_{11} + (e^2-e)q_{12} - \bar{e}^2\bar{q}_{11} - (\bar{e}^2-\bar{e})\bar{q}_{12} = 0$

In diesen Wänden liegen jeweils folgende Kanten K_k ($<\!\!-\!\!>\hat{\ell}_k^2$):

W_1: $(K_1, K_3, K_4, K_6, K_7, K_8, K_{10}, K_{11}, K_{12})$

W_2: $(K_2, K_3, K_5, K_6, K_7, K_9, K_{10}, K_{11}, K_{12})$

W_3: $(K_1, K_2, K_3, K_6, K_7, K_{10}, K_{11}, K_{12})$

W_4: $(K_3, K_6, K_7, K_8, K_9, K_{10}, K_{11}, K_{12})$

W_5: $(K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_8, K_9)$

W_6: $(K_1, K_2, K_4, K_5, K_8, K_9, K_{12})$

W_7: $(K_1, K_2, K_3, K_4, K_6, K_8)$

W_8: $(K_1, K_2, K_3, K_5, K_7, K_9)$

W_9: $(K_1, K_2, K_4, K_6, K_8, K_{11})$

W_{10}: $(K_1, K_2, K_5, K_7, K_9, K_{10})$

W_{11}: $(K_1, K_2, K_4, K_8, K_{11}, K_{12})$

W_{12}: $(K_1, K_2, K_5, K_9, K_{10}, K_{12})$

W_{13}: $(K_1, K_3, K_4, K_7, K_8, K_9)$

W_{14}: $(K_2, K_3, K_5, K_6, K_8, K_9)$

W_{15}: $(K_1, K_4, K_8, K_9, K_{10}, K_{12})$

W_{16}: $(K_2, K_5, K_8, K_9, K_{11}, K_{12})$

W_{17}: $(K_1, K_4, K_7, K_8, K_9, K_{10})$

W_{18}: $(K_2, K_5, K_6, K_8, K_9, K_{11})$.

Wie in III.1. erläutert, werden bezüglich der Klassifikation vollkommener Formen die Formen q und rq, $q \in Y_K^{(n)}$, $r \in \mathbb{Q}^{>0}$, identifiziert. Nach Satz III.2.2 besitzt die Form

$$3ex_1^2 + 2\sqrt{3}ex_1x_2 + 3ex_2^2 = 3\phi_I(\underline{x})$$

als eigentliche Automorphismen lediglich die Transformationen $\pm\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, d.h. es ist $\underline{\mathrm{Aut}(\phi_I)} = \left\langle\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\right\rangle \cong Z_2$. Ebenso ist der Stabilisator Γ_{ϕ_I} von P_{ϕ_I} gleich der Gruppe $\left\langle\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\right\rangle$.

Unter Γ_{ϕ_I} zerfällt die Menge der Kanten von P_{ϕ_I} in 7 Bahnen B_i:

$B_1 = \{K_1, K_2\}$, $B_2 = \{K_3\}$, $B_3 = \{K_4, K_5\}$, $B_4 = \{K_6, K_7\}$,
$B_5 = \{K_8, K_9\}$, $B_6 = \{K_{10}, K_{11}\}$, $B_7 = \{K_{12}\}$

und die Menge der Wände in 11 Bahnen C_i:

$C_1 = \{W_1, W_2\}$, $C_2 = \{W_3\}$, $C_3 = \{W_4\}$, $C_4 = \{W_5\}$, $C_5 = \{W_6\}$,
$C_6 = \{W_7, W_8\}$, $C_7 = \{W_9, W_{10}\}$, $C_8 = \{W_{11}, W_{12}\}$, $C_9 = \{W_{13}, W_{14}\}$
$C_{10} = \{W_{15}, W_{16}\}$, $C_{11} = \{W_{17}, W_{18}\}$.

Zur Untersuchung der Nachbarformen $\hat{v}_1(\hat{\underline{x}}) = \hat{\phi}_I(\hat{\underline{x}}) + \delta_1\hat{\psi}_1(\hat{\underline{x}})$ von ϕ_I bringen wir die obigen Linearformen $\psi_1(q)$, welche die Wände W_1, $1 = 1,\ldots,18$, bestimmen, durch Multiplikation mit $\sqrt{3}$ auf die Gestalt $\hat{\psi}_1(\hat{q}) = \sum_{i\leq j} a_{ij}^{(1)} q_{ij} + \sum_{i\leq j} \bar{a}_{ij}^{(1)} \bar{q}_{ij}$ und bilden die zugehörigen quadratischen Formen $\hat{\psi}_1(\hat{\underline{x}})$, $1 = 1,\ldots,18$.

Bahn C_1:

Die Nachbarform v_2 entlang der Wand W_2 erhält man mit $\delta_2 = \frac{1}{3}$:

$v_2(\underline{x}) = 2ex_1^2 + \frac{4}{3}\sqrt{3}ex_1x_2 + ex_2^2$.

Es ist $T^t\phi_I T = v_2$, $T = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, d.h. $v_2 \sim \phi_I$.

Bahn C_2:

Die Nachbarform v_3 entlang der Wand W_3 erhält man mit $\delta_3 = \frac{1}{3}$:

$v_3(\underline{x}) = (2 + \frac{2}{3}\sqrt{3})x_1^2 + 2(1 + \sqrt{3})x_1x_2 + (2 + \frac{2}{3}\sqrt{3})x_2^2$.

Es ist $\det(v_3) = \frac{2}{3}e \Longrightarrow v_3 \nmid \phi_I$ und $v_3 \nmid \phi_o$.

Bahn C_3:

Die Nachbarform v_4 entlang der Wand W_4 erhält man mit $\delta_4 = \frac{1}{3}$:

$v_4(\underline{x}) = (6 + \frac{10}{3}\sqrt{3})x_1^2 + (10 + 6\sqrt{3})x_1x_2 + (6 + \frac{10}{3}\sqrt{3})x_2^2$.

Es ist $\det(v_4) = \frac{2}{3}e^3 \Longrightarrow v_4 \nmid \phi_I$ und $v_4 \nmid \phi_o$.

Bahn C_4:

Die Nachbarform v_5 entlang der Wand W_5 erhält man mit $\delta_5 = \frac{1}{3}$:

$v_5(\underline{x}) = ex_1^2 + ex_1x_2 + ex_2^2 = \phi_o(\underline{x})$.

(W_5 ist die gemeinsame Wand von P_{ϕ_o} und P_{ϕ_I}.)

Bahn C_5:

Die Nachbarform v_6 entlang der Wand W_6 erhält man mit $\delta_6 = \frac{1}{3}$:

$v_6(\underline{x}) = ex_1^2 - ex_1x_2 + ex_2^2 \sim \phi_o(\underline{x})$.

Bahn C_6:

Die Nachbarform v_7 entlang der Wand W_7 erhält man mit $\delta_7 = \frac{4}{3}$:

$$v_7(\underline{x}) = ex_1^2 + \frac{2}{3}\sqrt{3}ex_1x_2 + (2 - \frac{1}{3}\sqrt{3})x_2^2 .$$

Es ist $T^t\phi_I T = v_7$, $T = \begin{bmatrix} -1 & \bar{e}-1 \\ 0 & \bar{e} \end{bmatrix}$, d.h. $v_7 \sim \phi_I$.

Bahn C_7:

Die Nachbarform v_9 entlang der Wand W_9 erhält man mit $\delta_9 = \frac{2}{3}$:

$$v_9(\underline{x}) = ex_1^2 + \frac{2}{3}\sqrt{3}x_1x_2 + (2 + \frac{1}{3}\sqrt{3})x_2^2 .$$

Es ist $T^t\phi_I T = v_9$, $T = \begin{bmatrix} 1 & -(\bar{e}-1) \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, d.h. $v_9 \sim \phi_I$.

Bahn C_8:

Die Nachbarform v_{11} entlang der Wand W_{11} erhält man mit $\delta_{11} = \frac{1}{3}$:

$$v_{11}(\underline{x}) = ex_1^2 - (2 + \frac{2}{3}\sqrt{3})x_1x_2 + (2 + \frac{2}{3}\sqrt{3})x_2^2.$$

Es ist $T^t\phi_I T = v_{11}$, $T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, d.h. $v_{11} \sim \phi_I$.

Bahn C_9:

Die Nachbarform v_{13} entlang der Wand W_{13} erhält man mit $\delta_{13} = \frac{1}{3}$:

$$v_{13}(\underline{x}) = ex_1^2 + (6 + \frac{10}{3}\sqrt{3})x_1x_2 + (6 + \frac{10}{3}\sqrt{3})x_2^2 .$$

Es ist $T^t\phi_I T = v_{13}$, $T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, d.h. $v_{13} \sim \phi_I$.

Bahn C_{10}:

Die Nachbarform v_{15} entlang der Wand W_{15} erhält man mit

$\delta_{15} = \frac{4}{3}$:

$v_{15}(\underline{x}) = ex_1^2 + (2 + \frac{4}{3}\sqrt{3})x_1x_2 + (18 + \frac{31}{3}\sqrt{3})x_2^2$.

Es ist $T^t\phi_I T = v_{15}$, $T = \begin{bmatrix} -1 & -e+1 \\ 0 & e \end{bmatrix}$, d.h. $v_{15} \sim \phi_I$.

Bahn C_{11}:

Die Nachbarform v_{17} entlang der Wand W_{17} erhält man mit $\delta_{17} = \frac{2}{3}$:

$v_{17}(\underline{x}) = ex_1^2 + (8 + \frac{14}{3}\sqrt{3})x_1x_2 + (10 + \frac{17}{3}\sqrt{3})x_2^2$.

Es ist $T^t\phi_I T = v_{17}$, $T = \begin{bmatrix} 1 & e-1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, d.h. $v_{17} \sim \phi_I$.

Die Formen v_3 und v_4 entlang der Wände W_3 und W_4 sind die einzigen Nachbarformen von ϕ_I, welche nicht äquivalent sind zu den bereits bekannten vollkommenen Formen ϕ_o und ϕ_I.

Es ist $v_3 \sim v_4$ ($T^t v_3 T = v_4$, $T = \begin{bmatrix} 1 & (1+\sqrt{3}) \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$); wir können uns daher auf die Untersuchung der vollkommenen Form

$v_3(\underline{x}) = \underline{(2 + \frac{2}{3}\sqrt{3})x_1^2 + 2(1 + \sqrt{3})x_1x_2 + (2 + \frac{2}{3}\sqrt{3})x_2^2}$

$=: \underline{\phi_{II}(\underline{x})}$ beschränken.

c) Die Form ϕ_{II} und ihre Nachbarformen

Es ist $\underline{M(\phi_{II})} = \{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \overline{e}-1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ \overline{e}-1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -\sqrt{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\sqrt{3} \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \overline{e}-1 \\ \overline{e} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \overline{e} \\ \overline{e}-1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \overline{e} \\ \overline{e} \end{bmatrix} \}$

Zu $\underline{m} \in M(\phi_{II})$ bilden wir die Matrizen $\underline{m}\cdot\underline{m}^t$:

$$\underline{m}_1\cdot\underline{m}_1^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{m}_2\cdot\underline{m}_2^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{m}_3\cdot\underline{m}_3^t = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\underline{m}_4\cdot\underline{m}_4^t = \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 3 \end{bmatrix}, \quad \underline{m}_5\cdot\underline{m}_5^t = \begin{bmatrix} 3 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{m}_6\cdot\underline{m}_6^t = \begin{bmatrix} 2\bar{e} & \bar{e}-1 \\ \bar{e}-1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\underline{m}_7\cdot\underline{m}_7^t = \begin{bmatrix} 1 & \bar{e}-1 \\ \bar{e}-1 & 2\bar{e} \end{bmatrix}, \quad \underline{m}_8\cdot\underline{m}_8^t = \begin{bmatrix} 4 & -2\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & 3 \end{bmatrix}, \quad \underline{m}_9\cdot\underline{m}_9^t = \begin{bmatrix} 3 & -2\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & 4 \end{bmatrix},$$

$$\underline{m}_{10}\cdot\underline{m}_{10}^t = \begin{bmatrix} 2\bar{e} & \bar{e}^2-\bar{e} \\ \bar{e}^2-\bar{e} & \bar{e}^2 \end{bmatrix}, \quad \underline{m}_{11}\cdot\underline{m}_{11}^t = \begin{bmatrix} \bar{e}^2 & \bar{e}^2-\bar{e} \\ \bar{e}^2-\bar{e} & 2\bar{e} \end{bmatrix},$$

$$\underline{m}_{12}\cdot\underline{m}_{12}^t = \begin{bmatrix} \bar{e}^2 & \bar{e}^2 \\ \bar{e}^2 & \bar{e}^2 \end{bmatrix}$$ und die zugehörigen Kantenformen

$\hat{\ell}_k^2 = \underline{\hat{m}}_k\cdot\underline{\hat{m}}_k^t$ von $P_{\phi_{II}}$, $k = 1,\ldots,12$.

Das Ergebnis des Computer-Algorithmus zeigt, daß $P_{\phi_{II}}$ 12 Wände besitzt, die durch folgende Gleichungen bestimmt sind:

W_1: $\psi_1(\hat{q}) = -q_{22} + \bar{q}_{22} = 0$

W_2: $\psi_2(\hat{q}) = -q_{11} + \bar{q}_{11} = 0$

W_3: $\psi_3(\hat{q}) = q_{11} - 2q_{12} + q_{22} - \bar{q}_{11} + 2\bar{q}_{12} - \bar{q}_{22} = 0$

W_4: $\psi_4(\hat{q}) = -\frac{1}{3}q_{11} - \frac{2}{3}\sqrt{3}\,q_{12} - q_{22} + \frac{1}{3}\bar{q}_{11} - \frac{2}{3}\sqrt{3}\,\bar{q}_{12} + \bar{q}_{22} = 0$

W_5: $\psi_5(\hat{q}) = -3q_{11} - 2\sqrt{3}\,q_{12} - q_{22} + 3\bar{q}_{11} - 2\sqrt{3}\,\bar{q}_{12} + \bar{q}_{22} = 0$

W_6: $\psi_6(\hat{q}) = -\frac{4}{3}q_{11} - \frac{4}{3}\sqrt{3}\,q_{12} - q_{22} + \frac{4}{3}\bar{q}_{11} - \frac{4}{3}\sqrt{3}\,\bar{q}_{12} + \bar{q}_{22} = 0$

W_7: $\psi_7(\hat{q}) = -\frac{3}{4}q_{11} - \sqrt{3}\,q_{12} - q_{22}$
$+ \frac{3}{4}\bar{q}_{11} - \sqrt{3}\,\bar{q}_{12} + \bar{q}_{22} = 0$

W_8: $\psi_8(\hat{q}) = \frac{1}{2}q_{11} + (e-1)q_{12} + eq_{22}$
$- \frac{1}{2}\bar{q}_{11} - (\bar{e}-1)\bar{q}_{12} - \overline{eq}_{22} = 0$

W_9: $\psi_9(\hat{q}) = 2eq_{11} + 2(e-1)q_{12} + q_{22}$
$- 2\overline{eq}_{11} - 2(\bar{e}-1)\bar{q}_{12} - \bar{q}_{22} = 0$

W_{10}: $\psi_{10}(\hat{q}) = \frac{1}{2}e^2q_{11} + (e^2-e)q_{12} + q_{22}$
$- \frac{1}{2}\bar{e}^2\bar{q}_{11} - (\bar{e}^2-\bar{e})\bar{q}_{12} - \overline{eq}_{22} = 0$

W_{11}: $\psi_{11}(\hat{q}) = 2eq_{11} + 2(e^2-e)q_{12} + eq_{22}$
$- 2\overline{eq}_{11} - 2(\bar{e}^2-\bar{e})\bar{q}_{12} - \bar{e}^2\bar{q}_{22} = 0$

W_{12}: $\psi_{12}(\hat{q}) = e^2q_{11} + 2e^2q_{12} + e^2q_{22}$
$- \bar{e}^2\bar{q}_{11} - 2\bar{e}^2\bar{q}_{12} - \bar{e}^2\bar{q}_{22} = 0$

Durch Multiplikation der Linearformen $\psi_l(\hat{q})$, $l = 1,\ldots,12$, mit $\sqrt{3}$ erhält man diese in der Gestalt $\hat{\psi}_l(\hat{q}) = \sum_{i\leq j} a_{ij}^{(l)} q_{ij} + \sum_{i\leq j} \bar{a}_{ij}^{(l)} \bar{q}_{ij}$, sodaß die quadratischen Formen $\hat{\psi}_l(\hat{\underline{x}})$, $l = 1,\ldots,12$, gebildet werden können.

In den genannten Wänden liegen jeweils folgende Kanten $K_k(<-> \hat{\ell}_k^2)$:

W_1: $(K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6, K_8, K_9)$

W_2: $(K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_7, K_8, K_9)$

W_3: $(K_1, K_2, K_3, K_6, K_7, K_{10}, K_{11}, K_{12})$

W_4: $(K_1, K_2, K_4, K_5, K_6, K_8, K_9, K_{11})$

W_5: $(K_1, K_2, K_4, K_5, K_7, K_8, K_9, K_{10})$

W_6: $(K_1, K_2, K_4, K_5, K_8, K_9, K_{10}, K_{12})$

W_7: $(K_1, K_2, K_4, K_5, K_8, K_9, K_{11}, K_{12})$

W_8: $(K_1, K_3, K_5, K_6, K_7, K_{10}, K_{11}, K_{12})$

W_9: $(K_2, K_3, K_4, K_6, K_7, K_{10}, K_{11}, K_{12})$

W_{10}: $(K_3, K_4, K_6, K_7, K_9, K_{10}, K_{11}, K_{12})$

W_{11}: $(K_3, K_5, K_6, K_7, K_8, K_{10}, K_{11}, K_{12})$

W_{12}: $(K_3, K_6, K_7, K_8, K_9, K_{10}, K_{11}, K_{12})$.

Die Wurzel der Form ϕ_{II} ist der elliptische Fixpunkt $\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{i}{2} =: \tau_2$ sechster Ordnung der Hilbert'schen Modulgruppe zu $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$, und wir erhalten die Automorphismen von ϕ_{II}:

$$\{\pm\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, \pm\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -\sqrt{3}\end{bmatrix}, \pm\begin{bmatrix}-1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 2\end{bmatrix}, \pm\begin{bmatrix}\sqrt{3} & 2\\ -2 & -\sqrt{3}\end{bmatrix}, \pm\begin{bmatrix}-2 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{bmatrix},$$

$$\pm\begin{bmatrix}\sqrt{3} & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}, \pm\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}, \pm\begin{bmatrix}1 & 0\\ -\sqrt{3} & -1\end{bmatrix}, \pm\begin{bmatrix}-\sqrt{3} & -1\\ 2 & \sqrt{3}\end{bmatrix}, \pm\begin{bmatrix}2 & \sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & -2\end{bmatrix},$$

$$\pm\begin{bmatrix}-\sqrt{3} & -2\\ 1 & \sqrt{3}\end{bmatrix}, \pm\begin{bmatrix}1 & \sqrt{3}\\ 0 & -1\end{bmatrix}\} \text{ , d.h.}$$

$$\underline{\mathrm{Aut}(\phi_{II})} = \langle v,w;\ v^6 = w^2 = 1,\ vw = wv^{-1}\rangle \quad \text{mit } v = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -\sqrt{3}\end{bmatrix}$$

$$\cong D_6 \qquad \text{und } w = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix},$$

und hieraus den Stabilisator $\Gamma_{\phi_{II}}$ von $P_{\phi_{II}}$:

$$\Gamma_{\phi_{II}} = \langle \tilde{v}, \tilde{w};\ \tilde{v}^6 = \tilde{w}^2 = 1,\ \tilde{v}\tilde{w} = \tilde{w}\tilde{v}^{-1}\rangle \quad , \tilde{v} = v^t, \tilde{w} = w^t,$$

$$\cong D_6 .$$

Unter $\Gamma_{\phi_{II}}$ zerfällt die Menge der Kanten von $P_{\phi_{II}}$ in zwei Bahnen B_i:

$B_1 = \{K_3, K_6, K_7, K_{10}, K_{11}, K_{12}\}$,

$B_2 = \{K_1, K_2, K_4, K_5, K_8, K_9\}$ und die Menge der Wände in zwei

Bahnen C_i:

$C_1 = \{W_1, W_2, W_4, W_5, W_6, W_7\}$ und

$C_2 = \{W_3, W_8, W_9, W_{10}, W_{11}, W_{12}\}$.

Es können daher höchstens zwei zu ϕ_{II} nicht-äquivalente Nachbarformen $\hat{v}_1(\hat{\underline{x}}) = \hat{\phi}_{II}(\hat{\underline{x}}) + \delta_1\hat{\psi}_1(\hat{\underline{x}})$ auftreten.

Wir untersuchen die Nachbarformen entlang von Repräsentanten der Bahnen C_i:

Bahn C_1:

Die Nachbarform v_4 entlang der Wand W_4 erhält man mit $\delta_4 = 1$:

$v_4(\underline{x}) = (2 + \frac{1}{3}\sqrt{3})x_1^2 + 2\sqrt{3}\, x_1x_2 + (2 - \frac{1}{3}\sqrt{3})x_2^2$.

Es ist $T^t\phi_I T = v_4$, $T = \begin{bmatrix} \bar{e}-1 & -\bar{e} \\ 1 & -(\bar{e}-1) \end{bmatrix}$, d.h. $v_4 \sim \phi_I$.

Bahn C_2:

Die Wand W_3 ist die gemeinsame Wand von P_{ϕ_I} und $P_{\phi_{II}}$;
Die Nachbarform von ϕ_{II} entlang W_3 ist daher ϕ_I.

Wir haben gezeigt:

2.1 Satz: Es existieren über $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ genau drei Klassen vollkommener binärer quadratischer Formen.
(Repräsentanten: ϕ_0, ϕ_I und ϕ_{II})

2.2 Bemerkungen:

i) Da die Gruppe der eigentlichen Automorphismen von ϕ_I die triviale Gruppe ist und die Fixgruppen elliptischer Fixpunkte der Hilbert'schen Modulgruppe Γ zu $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ genau die nicht-trivialen (zyklischen) endlichen Untergruppen von Γ sind ([7], S. 167), kann die Wurzel $\tau_1 := \frac{\sqrt{3}}{3} + i\frac{\sqrt{6}}{6}$ von ϕ_I nicht ein elliptischer Fixpunkt von Γ zu $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ sein.

Es stellt sich jedoch die Frage: Entspricht ϕ_I einem elliptischen Fixpunkt der erweiterten Hilbert'schen Modulgruppe

$\Gamma_\varepsilon = \{T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$; $a,b,c,d \in \mathfrak{O}_3$, $|T| = \varepsilon$, ε totalpositive Einheit$\}$?

Nun ist Γ Normalteiler vom Index 2 in Γ_ε. Es genügt daher, unter den elliptischen Fixpunkten von Γ_ε ([8], S. 382) die in bezug auf Γ neu hinzugekommenen Fixpunkte der Ordnung 2 zu betrachten. Dies sind die Punkte $T_2 := i\sqrt{e}$ und $T_3 := \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}) + \frac{i}{2}\sqrt{e}|1 - \sqrt{3}|$.

Angenommen die Wurzel τ_1 von ϕ_I ist äquivalent zu T_2 oder T_3, dann müssen die entsprechenden quadratischen Formen ebenfalls äquivalent sein. Die zu den Punkten T_2 und T_3 gehörenden quadratischen Formen sind (modulo K^+) die folgenden:

T_2: $x_1^2 + ex_2^2 =: q_2$ $\quad (\det(q_2) = e)$

T_3: $x_1^2 + (e-1)x_1x_2 + \frac{1}{2}(e+1)x_2^2 =: q_3$ $\quad (\det(q_3) = 1)$.

Diese Formen sind jedoch beide nicht-äquivalent zu der (modulo K^+) τ_1 zugehörenden quadratischen Form $\phi_I' = x_1^2 + \frac{2}{3}\sqrt{3}\, x_1x_2 + x_2^2$ $(= \frac{1}{e}\phi_I)$ $(\det(\phi_I') = \frac{2}{3})$. Daher entspricht ϕ_I nicht einem elliptischen Fixpunkt von Γ_ε.

ii) Die in [8] angegebenen elliptischen Fixpunkte der Hilbert'schen Modulgruppe Γ zu $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ der Ordnung ≥ 3 sind:

$\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3} = \tau_o$

$\frac{1}{2}e + \frac{i}{2}e\sqrt{3} =: \tau_o'$, Ord τ_o = Ord τ_o' = 3

$\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{i}{2} = \tau_2$, Ord τ_2 = 6

Bezüglich der Gruppe $GL(2,\mathcal{O}_3)$ ist $\tau_o \sim \tau_o'$ und daher die zugehörigen positiv definiten binären Formen äquivalent.

Zu τ_o gehört die Form $r(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)$, $r>>0$, und mit $r = e$ erhält man die vollkommene Form ϕ_o.

Zu τ_2 gehört die Form $r(x_1^2 + \sqrt{3}\, x_1x_2 + x_2^2)$, $r>>0$, $r = 2 + \frac{2}{3}\sqrt{3}$ ergibt die vollkommene Form ϕ_{II}.

3. Die Formen ϕ_o und ϕ_I über $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$

a) Die Form ϕ_o und ihre Nachbarformen

Die Grundeinheit von $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ ist $e = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$.

Nach Satz III.2.1 ist die Form $\phi_o(\underline{x}) = e\sqrt{5}(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)$ vollkommen.

Es ist $\mu(\phi_o) = 5$ und $M(\phi_o) = \{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\bar{e}\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\\bar{e}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\bar{e}\\-\bar{e}\end{bmatrix}\}$

Zu $\underline{m} \in M(\phi_o)$ bilden wir die Matrizen $\underline{m}\cdot\underline{m}^t$:

$$\underline{m}_1\cdot\underline{m}_1^t = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}, \quad \underline{m}_2\cdot\underline{m}_2^t = \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}, \quad \underline{m}_3\cdot\underline{m}_3^t = \begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\underline{m}_4\cdot\underline{m}_4^t = \begin{bmatrix}\bar{e}^2 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}, \quad \underline{m}_5\cdot\underline{m}_5^t = \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & \bar{e}^2\end{bmatrix}, \quad \underline{m}_6\cdot\underline{m}_6^t = \begin{bmatrix}\bar{e}^2 & -\bar{e}^2\\-\bar{e}^2 & \bar{e}^2\end{bmatrix}$$

und die Kantenformen $\hat{\ell}_k^2 = \widehat{\underline{m}_k\cdot\underline{m}_k^t}$ von P_{ϕ_o}, $k = 1,\ldots,6$.

Man erhält entweder durch Koeffizientenvergleich (siehe Seite 32) oder mit Hilfe des Computer-Algorithmus die Gleichungen $\psi_l(\hat{q}) = 0$, welche die 6 Wände W_l des Polyeder-Kegels P_{ϕ_o} bestimmen:

W_1: $\psi_1(\hat{q}) = e^2q_{11} + e^2q_{12} - \bar{e}^2\bar{q}_{11} - \bar{e}^2\bar{q}_{12} = 0$

W_2: $\psi_2(\hat{q}) = e^2q_{12} + e^2q_{22} - \bar{e}^2\bar{q}_{12} - \bar{e}^2\bar{q}_{22} = 0$

W_3: $\psi_3(\hat{q}) = -e^2q_{12} + \bar{e}^2\bar{q}_{12} = 0$

W_4: $\psi_4(\hat{q}) = -q_{11} - q_{12} + \bar{q}_{11} + \bar{q}_{12} = 0$

W_5: $\psi_5(\hat{q}) = -q_{12} - q_{22} + \bar{q}_{12} + \bar{q}_{22} = 0$

W_6: $\psi_6(\hat{q}) = q_{12} - \bar{q}_{12} = 0$.

Folgende Kanten K_k ($\longleftrightarrow \hat{\ell}_k^2$) liegen jeweils in diesen Wänden:

W_1: $(K_2, K_3, K_4, K_5, K_6)$

W_2: $(K_1, K_3, K_4, K_5, K_6)$

W_3: $(K_1, K_2, K_4, K_5, K_6)$

W_4: $(K_1, K_2, K_3, K_5, K_6)$

W_5: $(K_1, K_2, K_3, K_4, K_6)$

W_6: $(K_1, K_2, K_3, K_4, K_5)$

Die Automorphismengruppe von ϕ_o stimmt elementweise mit den Automorphismengruppen der Formen ϕ_o über $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ und ϕ_o über $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ überein. Dies gilt ebenfalls für den Stabilisator Γ_{ϕ_o} von P_{ϕ_o}, d.h. es ist

$\underline{\mathrm{Aut}(\phi_o)} \cong D_3 \cong \Gamma_{\phi_o}$.

Unter Γ_{ϕ_o} zerfällt die Menge der Kanten von P_{ϕ_o} in zwei Bahnen B_i:

$B_1 = \{K_1, K_2, K_3\}$, $B_2 = \{K_4, K_5, K_6\}$ und die Menge der Wände in die Bahnen

$C_1 = \{W_1, W_2, W_3\}$ und $C_2 = \{W_4, W_5, W_6\}$.

Wir wählen als Repräsentanten der Bahnen C_i die Wände W_3 und W_6, bilden die quadratischen Formen

$\hat{\psi}_3(\hat{\underline{x}}) = -e^2\sqrt{5}\, x_1x_2 + \bar{e}^2\sqrt{5}\, \bar{x}_1\bar{x}_2$,

$\hat{\psi}_6(\hat{\underline{x}}) = \sqrt{5}\, x_1x_2 - \sqrt{5}\, \bar{x}_1\bar{x}_2$

und erhalten mit $\delta_3 = \delta_6 = 1$ die Nachbarformen

$v_3(\underline{x}) = e\sqrt{5}\, x_1^2 - \sqrt{5}\, x_1x_2 + e\sqrt{5}\, x_2^2$ und

$v_6(\underline{x}) = e\sqrt{5}\, x_1^2 + e^2\sqrt{5}\, x_1x_2 + e\sqrt{5}\, x_2^2$.

Es ist $T^t v_6 T = v_3$, $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -e & 0 \end{bmatrix}$, d.h. $v_3 \sim v_6$. Jedoch sind

diese Nachbarformen nicht äquivalent zur Ausgangsform ϕ_0.
Es ist somit $\underline{\phi_I(\underline{x}) := e\sqrt{5}(x_1^2 + ex_1x_2 + x_2^2)}$
Repräsentant einer weiteren Klasse vollkommener binärer Formen über $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$.

b) Die Form ϕ_I und ihre Nachbarformen

Es ist $\underline{M(\phi_I)} = \{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\bar{e}\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\\bar{e}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\bar{e}\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\\bar{e}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}e\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\e\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}e\\-e\end{bmatrix}\}$.

Zu $\underline{m} \in M(\phi_I)$ bilden wir die Matrizen $\underline{m}\cdot\underline{m}^t$:

$$\underline{m}_1\cdot\underline{m}_1^t = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}, \quad \underline{m}_2\cdot\underline{m}_2^t = \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}, \quad \underline{m}_3\cdot\underline{m}_3^t = \begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix},$$

$$\underline{m}_4\cdot\underline{m}_4^t = \begin{bmatrix}\bar{e}^2 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}, \quad \underline{m}_5\cdot\underline{m}_5^t = \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & \bar{e}^2\end{bmatrix}, \quad \underline{m}_6\cdot\underline{m}_6^t = \begin{bmatrix}e^2 & \bar{e}\\\bar{e} & \bar{e}^2\end{bmatrix},$$

$$\underline{m}_7\cdot\underline{m}_7^t = \begin{bmatrix}1 & \bar{e}\\\bar{e} & \bar{e}^2\end{bmatrix}, \quad \underline{m}_8\cdot\underline{m}_8^t = \begin{bmatrix}e^2 & -e\\-e & 1\end{bmatrix}, \quad \underline{m}_9\cdot\underline{m}_9^t = \begin{bmatrix}1 & -e\\-e & e^2\end{bmatrix},$$

$$\underline{m}_{10}\cdot\underline{m}_{10}^t = \begin{bmatrix}e^2 & -e^2\\-e^2 & e^2\end{bmatrix}$$ und die zugehörigen Kantenformen

$\hat{\ell}_k^2 = \widehat{\underline{m}_k\cdot\underline{m}_k^t}$ von P_{ϕ_I}, $k = 1,\ldots,10$.

Das Ergebnis des Computer-Algorithmus zeigt, daß P_{ϕ_I} durch 22 Ungleichungen $\psi_l(\hat{q}) \geq 0$ bestimmt ist, d.h. die folgenden

22 Wände besitzt:

$$W_1: \quad \psi_1(\hat{q}) = -q_{12} - q_{22} + \bar{q}_{12} + \bar{q}_{22} = 0$$

$$W_2: \quad \psi_2(\hat{q}) = -q_{11} - q_{12} + \bar{q}_{11} + \bar{q}_{12} = 0$$

$$W_3: \quad \psi_3(\hat{q}) = -eq_{12} - \bar{e}\bar{q}_{12} = 0$$

$$W_4: \quad \psi_4(\hat{q}) = -q_{11} - \sqrt{5}\, q_{12} - q_{22} + \bar{q}_{11} - \sqrt{5}\, \bar{q}_{12} + \bar{q}_{22} = 0$$

$$W_5: \quad \psi_5(\hat{q}) = eq_{12} + e^2 q_{22} - \bar{e}\bar{q}_{12} - \bar{e}^2\bar{q}_{22} = 0$$

$$W_6: \quad \psi_6(\hat{q}) = q_{12} - \bar{e}q_{22} - \bar{q}_{12} + e\bar{q}_{22} = 0$$

$$W_7: \quad \psi_7(\hat{q}) = e^2 q_{11} + eq_{12} - \bar{e}^2\bar{q}_{11} - \bar{e}\bar{q}_{12} = 0$$

$$W_8: \quad \psi_8(\hat{q}) = -eq_{11} + q_{12} + \bar{e}\bar{q}_{11} - \bar{q}_{12} = 0$$

$$W_9: \quad \psi_9(\hat{q}) = e^2 q_{11} + e(2+\sqrt{5})q_{12} + (2+\sqrt{5})q_{22} - \bar{e}^2\bar{q}_{11} - \bar{e}(2-\sqrt{5})\bar{q}_{12} - (2-\sqrt{5})\bar{q}_{22} = 0$$

$$W_{10}: \quad \psi_{10}(\hat{q}) = e^3 q_{11} + e^4 q_{12} + e^2 q_{22} - \bar{e}^3\bar{q}_{11} - \bar{e}^4\bar{q}_{12} - \bar{e}^2\bar{q}_{22} = 0$$

$$W_{11}: \quad \psi_{11}(\hat{q}) = -q_{12} + \bar{q}_{12} = 0$$

$$W_{12}: \quad \psi_{12}(\hat{q}) = -eq_{12} - q_{22} + \bar{e}\bar{q}_{12} + \bar{q}_{22} = 0$$

$$W_{13}: \quad \psi_{13}(\hat{q}) = -q_{11} - eq_{12} + \bar{q}_{11} + \bar{e}\bar{q}_{12} = 0$$

$$W_{14}: \quad \psi_{14}(\hat{q}) = -q_{11} - eq_{12} - q_{22} + \bar{q}_{11} + \bar{e}\bar{q}_{12} + \bar{q}_{22} = 0$$

$$W_{15}: \quad \psi_{15}(\hat{q}) = eq_{12} + eq_{22} - \bar{e}\bar{q}_{12} - \bar{e}\bar{q}_{22} = 0$$

$$W_{16}: \quad \psi_{16}(\hat{q}) = q_{12} + eq_{22} - \bar{q}_{12} - \bar{e}\bar{q}_{22} = 0$$

$$W_{17}: \quad \psi_{17}(\hat{q}) = eq_{11} + eq_{12} - \bar{e}\bar{q}_{11} - \bar{e}\bar{q}_{12} = 0$$

$$W_{18}: \quad \psi_{18}(\hat{q}) = eq_{11} + q_{12} - \bar{e}\bar{q}_{11} - \bar{q}_{12} = 0$$

$$W_{19}: \quad \psi_{19}(\hat{q}) = e^2 q_{11} + e^3 q_{12} + e^2 q_{22} - \bar{e}^2\bar{q}_{11} - \bar{e}^3\bar{q}_{12} - \bar{e}^2\bar{q}_{22} = 0$$

$$W_{20}: \quad \psi_{20}(\hat{q}) = e^2 q_{11} + e^3 q_{12} + e q_{22} - \bar{e}^2 \bar{q}_{11} - \bar{e}^3 \bar{q}_{12} - \bar{e}\bar{q}_{22} = 0$$

$$W_{21}: \quad \psi_{21}(\hat{q}) = e q_{11} + e^3 q_{12} + e^2 q_{22} - \bar{e}\bar{q}_{11} - \bar{e}^3 \bar{q}_{12} - \bar{e}^2 \bar{q}_{22} = 0$$

$$W_{22}: \quad \psi_{22}(\hat{q}) = e q_{11} - e\sqrt{5}\, q_{12} + e q_{22} - \bar{e}\bar{q}_{11} - \bar{e}\sqrt{5}\, \bar{q}_{12} - \bar{e}\bar{q}_{22} = 0 \,.$$

Durch Multiplikation dieser Gleichungen mit $\sqrt{5}$ erhält man sie in der Form $\hat{\psi}(\hat{q}) = \sum_{i \leq j} a_{ij} q_{ij} + \sum_{i \leq j} \bar{a}_{ij} \bar{q}_{ij} = 0$, sodaß die quadratischen Formen $\hat{\psi}(\hat{\underline{x}})$ gebildet werden können.

In den Wänden von P_{ϕ_I} liegen jeweils folgende Kanten $K_k (\longleftrightarrow \hat{\ell}_k^2)$:

W_1: $(K_1, K_2, K_3, K_4, K_9, K_{10})$

W_2: $(K_1, K_2, K_3, K_5, K_8, K_{10})$

W_3: $(K_1, K_2, K_4, K_5, K_6, K_7)$

W_4: $(K_1, K_2, K_6, K_7, K_8, K_9)$

W_5: $(K_1, K_3, K_4, K_5, K_7, K_8)$

W_6: $(K_1, K_4, K_6, K_8, K_9, K_{10})$

W_7: $(K_2, K_3, K_4, K_5, K_6, K_9)$

W_8: $(K_2, K_5, K_7, K_8, K_9, K_{10})$

W_9: $(K_3, K_4, K_6, K_7, K_8, K_{10})$

W_{10}: $(K_3, K_5, K_6, K_7, K_9, K_{10})$

W_{11}: $(K_1, K_2, K_3, K_4, K_5)$

W_{12}: $(K_1, K_2, K_4, K_6, K_9)$

W_{13}: $(K_1, K_2, K_5, K_7, K_8)$

W_{14}: $(K_1, K_2, K_8, K_9, K_{10})$

W_{15}: $(K_1, K_3, K_4, K_8, K_{10})$

W_{16}: $(K_1, K_4, K_6, K_7, K_8)$

W_{17}: $(K_2, K_3, K_5, K_9, K_{10})$

W_{18}: $(K_2, K_5, K_6, K_7, K_9)$

W_{19}: $(K_3, K_4, K_5, K_6, K_7)$

W_{20}: $(K_3, K_4, K_6, K_9, K_{10})$

W_{21}: $(K_3, K_5, K_7, K_8, K_{10})$

W_{22}: $(K_6, K_7, K_8, K_9, K_{10})$.

Die Wurzel der Form ϕ_I ist der elliptische Fixpunkt $\frac{1}{2}e + \frac{i}{2}\sqrt[4]{5}\sqrt{|e|} =: \tau_1$ fünfter Ordnung der Hilbert'schen Modulgruppe zu $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$.

Es ist die Menge der Automorphismen von ϕ_I gleich

$$\{\pm\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, \pm\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & e\end{bmatrix}, \pm\begin{bmatrix}-1 & -e\\ e & e\end{bmatrix}, \pm\begin{bmatrix}-e & -e\\ e & 1\end{bmatrix}, \pm\begin{bmatrix}-e & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix},$$

$$\pm\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}, \pm\begin{bmatrix}-1 & 0\\ e & 1\end{bmatrix}, \pm\begin{bmatrix}-e & -1\\ e & e\end{bmatrix}, \pm\begin{bmatrix}-e & -e\\ 1 & e\end{bmatrix}, \pm\begin{bmatrix}-1 & -e\\ 0 & 1\end{bmatrix}\},$$

d.h. $\underline{\mathrm{Aut}(\phi_I)} = \left\langle v,w;\ v^5 = w^2 = 1,\ vw = wv^{-1}\right\rangle$, $v = \begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & e\end{bmatrix}$,

$w = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$,

$\cong D_5$

und der Stabilisator Γ_{ϕ_I} von P_{ϕ_I}:

$\Gamma_{\phi_I} = \left\langle \tilde{v},\tilde{w};\ \tilde{v}^5 = \tilde{w}^2 = 1,\ \tilde{v}\tilde{w} = \tilde{w}\tilde{v}^{-1}\right\rangle$, $\tilde{v} = v^t$, $\tilde{w} = w^t$,

$\cong D_5$.

Unter Γ_{ϕ_I} zerfällt die Menge der Kanten in zwei Bahnen B_i:

$B_1 = \{K_1, K_2, K_8, K_9, K_{10}\}$, $B_2 = \{K_3, K_4, K_5, K_6, K_7\}$ und die Menge

der Wände in sechs Bahnen C_i:

$C_1 = \{W_1, W_2, W_4, W_6, W_8\}$,

$C_2 = \{W_3, W_5, W_7, W_9, W_{10}\}$,

$C_3 = \{W_{11}, W_{16}, W_{18}, W_{20}, W_{21}\}$,

$C_4 = \{W_{12}, W_{13}, W_{15}, W_{17}, W_{22}\}$,

$C_5 = \{W_4\}$, $C_6 = \{W_9\}$.

Es können daher höchstens fünf zu ϕ_I nicht-äquivalente Nachbarformen $\hat{v}_1(\hat{\underline{x}}) = \phi_I(\hat{\underline{x}}) + \delta_1\hat{\psi}_1(\hat{\underline{x}})$ auftreten.
Wir untersuchen die Nachbarformen entlang von Repräsentanten der Bahnen C_i:

Bahn C_1:

Die Nachbarform v_1 entlang der Wand W_1 erhält man mit $\delta_1 = 1$:

$v_1(\underline{x}) = e\sqrt{5}\, x_1^2 + e\sqrt{5}\, x_1x_2 - \bar{e}\sqrt{5}\, x_2^2$.

Es ist $v_1 \sim \phi_I$ $(T^t\phi_I T = v_1,\ T = \begin{bmatrix} 0 & \bar{e} \\ -1 & 0 \end{bmatrix})$.

Bahn C_2:

Die Nachbarform v_3 entlang der Wand W_3 erhält man mit $\delta_3 = 1$:

$v_3(\underline{x}) = e\sqrt{5}\, x_1^2 + \sqrt{5}\, x_1x_2 + e\sqrt{5}\, x_2^2$.

Es ist $v_3 \sim \phi_I$ $(T^t\phi_I T = v_3,\ T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -e \end{bmatrix})$.

Bahn C_3:

W_{11} ist die gemeinsame Wand von P_{ϕ_0} und P_{ϕ_I}, d.h. $v_{11} = \phi_0$.

Bahn C_4:

Die Nachbarform v_{12} entlang der Wand W_{12} erhält man mit $\delta_{12} = 1$:

$$v_{12}(\underline{x}) = e\sqrt{5}\, x_1^2 + \sqrt{5}\, x_1x_2 - \bar{e}\sqrt{5}\, x_2^2 .$$

Es ist $v_{12} \sim \phi_o$ $(T^t v_{12} T = \phi_o,\ T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix})$.

Bahn C_5:

Die Nachbarform v_4 entlang der Wand W_4 erhält man mit $\delta_4 = 1$:

$$v_4(\underline{x}) = \bar{e}\sqrt{5}\, x_1^2 + \sqrt{5}\, x_1x_2 + \bar{e}\sqrt{5}\, x_2^2 .$$

Es ist $v_4 \sim \phi_I$ $(T^t \phi_I T = v_4,\ T = \begin{bmatrix} 0 & -\bar{e} \\ \bar{e} & 0 \end{bmatrix})$.

Bahn C_6:

Die Nachbarform v_9 entlang der Wand W_9 erhält man mit $\delta_9 = 1$:

$$v_9(\underline{x}) = e^3\sqrt{5}\, x_1^2 + e^4\sqrt{5}\, x_1x_2 + e^3\sqrt{5}\, x_2^2 .$$

Es ist $v_9 \sim \phi_I$ $(T^t \phi_I T = v_9,\ T = \begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix})$.

Damit sind sämtliche Nachbarformen von ϕ_I äquivalent zu ϕ_I oder ϕ_o, und wir haben bewiesen:

3.1 Satz: Es existieren über $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ genau zwei Klassen vollkommener binärer quadratischer Formen.
(Repräsentanten: ϕ_o, ϕ_I)

3.2 Bemerkung:

In [8] sind folgende nicht-äquivalente elliptische Fixpunkte der Hilbert'schen Modulgruppe zu $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ mit der Ordnung ≥ 3 angegeben:

$$\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3} =: \tau_o$$

$$-\frac{1}{2}\bar{e} + \frac{i}{2}\sqrt{3}|\bar{e}| =: \tau_o' \qquad \text{Ord } \tau_o = \text{Ord } \tau_o' = 3$$

$$\frac{1}{2}e + \frac{i}{2}\sqrt[4]{5}\sqrt{|\bar{e}|} =: \tau_1$$

$$-\frac{1}{2}\bar{e} + \frac{i}{2}\sqrt[4]{5}\sqrt{|e|} =: \tau_1' \qquad \text{Ord } \tau_1 = \text{Ord } \tau_1' = 5 \ .$$

Bezüglich der Gruppe $GL(2,\mathcal{O}_5)$ ist $\tau_o \sim \tau_o'$ und damit die zugehörenden quadratischen Formen äquivalent. Zu τ_o gehört die Form $q_o(\underline{x}) = r(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)$, $r >> 0$, welche für $r = e\sqrt{5}$ die vollkommene Form ϕ_o darstellt.
Die zu τ_1 und τ_1' gehörenden quadratischen Formen sind $q_1(\underline{x}) = r(x_1^2 + ex_1x_2 + x_2^2)$ und $q_1'(\underline{x}) = r(x_1^2 - \bar{e}x_1x_2 + x_2^2)$, $r >> 0$. Man erhält jeweils mit $e\sqrt{5}$ die Form $\phi_I(\underline{x})$ bzw. die vollkommene Form $e\sqrt{5}\ x_1^2 + \sqrt{5}\ x_1x_2 + e\sqrt{5}\ x_2^2$ (= Nachbarform v_3 von ϕ_I) $\sim \phi_I$.

Anmerkungen

1) Die in Kapitel IV zum Nachweis der Äquivalenz gewisser binärer vollkommener Formen über $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, d=2,3,5, verwendeten Transformationsmatrizen aus $GL_2(\mathcal{O}_d)$ konnten im allgemeinen ohne größere Schwierigkeiten angegeben werden. Eine explizite Methode, um die Frage nach der Äquivalenz zweier über einem beliebigen reell-quadratischen Zahlkörper positiv definiter binärer Formen q und q' bezüglich $GL_2(\mathcal{O}_d)$ entscheiden zu können, ergibt sich anhand der Arbeit [14] von C.L. Siegel. Wir bilden die zu q und q' gehörenden Wurzeln τ,τ' und untersuchen diese durch Transformieren in den Fundamentalbereich der Hilbert'schen Modulgruppe Γ ([14], S. 249ff.) zunächst auf Äquivalenz bezüglich Γ.
Sind τ und τ' äquivalent bezüglich Γ, so gilt dies auch für q und q'. Sind τ, τ' nicht-äquivalent bezüglich Γ, so genügt es, die Äquivalenz von τ und τ' bezüglich der Transformationen $\begin{bmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \pm e & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ zu überprüfen, um die Frage nach der Äquivalenz von q und q' bezüglich $GL_2(\mathcal{O}_d)$ entscheiden zu können.

2) Die Wurzeln der Formen ϕ_o, ϕ_I (über $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$) und ϕ_o, ϕ_I (über $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$) liegen (als elliptische Fixpunkte) auf Randflächen des in [3], Satz 2 bzw. Satz 1, beschriebenen Fundamentalbereichs der entsprechenden Hilbert'schen Modulgruppe Γ.
Bezüglich $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ stellen wir fest, daß die Wurzeln der

vollkommenen Formen ϕ_0, ϕ_I und ϕ_{II} auf Randflächen des Fundamentalbereichs der erweiterten Hilbert'schen Modulgruppe Γ_ε liegen ([3], Satz 4). ϕ_0 und ϕ_{II} sind auch elliptische Fixpunkte von Γ_ε.

3) $q \in Y_K^{(n)}$ heiße <u>eutaktisch</u>, wenn gilt $\hat{q}^{-1} = \sum_{k=1}^{s} r_k \hat{\ell}_k^2$, ℓ_k die Minimallinearformen von q und $r_k \in \mathbb{R}^{>0}$, $k = 1,\ldots,s$.

Von den in IV. 1.-3. angegebenen Repräsentanten der Klassen vollkommener binärer Formen ist die Form ϕ_I über $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ nicht eutaktisch. Dies fällt insofern auf, als bei vollkommenen Formen über $\mathbb{Q}$ - wie eingangs erwähnt - erst bei der Variablenzahl n = 6 vollkommene Formen auftreten, die nicht eutaktisch (und damit nicht extrem) sind.

4) In Verallgemeinerung der Minkowski'schen Reduktionbedingungen binärer quadratischer Formen und analog zu Dirichlet's reduzierten binären Formen über Z[i] [5] nennen wir eine quadratische Form $q = [q_{ij}] \in Y_K^{(2)}$ <u>reduziert</u>, wenn sie die Bedingung

$$2\,\mathrm{Norm}(q_{12}) \leq \mathrm{Norm}(q_{11}) \leq \mathrm{Norm}(q_{22})$$

erfüllt.

Die in IV. 1.-3. angegebenen Repräsentanten der Klassen vollkommener Formen über der Körpern $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, d = 2,3,5, sind reduziert.

Literaturverzeichnis

[1] BARNES, E.S., The construction of perfect and extreme forms I,II; Acta arithmetica V(1958), 57-79, Acta arithmetica V (1959), 206-222

[2] CASSELS, J.W.S., Rational quadratic forms; Academic Press, London, New York (1978)

[3] CLAUS, G., Die Randmannigfaltigkeiten und die "tiefsten" Punkte des Fundamentalbereichs für drei Hilbert'sche Modulgruppen; Math. Ann. 176 (1968), 225-256

[4] COXETER, H.S.M., Extreme forms; Canad. J. of Math. 3 (1951), 391-441

[5] LEJEUNE DIRICHLET, P.G., Recherches sur les formes quadratiques à coefficients et à indéterminées complexes; Ges. Werke Bd. I, 533-618

[6] GERMANN, K. Tabellen reduzierter positiver quaternärer Formen; Comment. Math. Helv. 38 (1963), 56-83

[7] GUNDLACH, K.B., Some new results in the theory of Hilbert's modular group; Contributions to function theory, Bombay 1960

[8] - - - - - - - , Die Fixpunkte einiger Hilbert'scher Modulgruppen; Math. Ann. 157 (1965), 369-390

[9] HERMITE, M.Ch., Extraits de lettres de M.Ch. Hermite à M. Jacobi sur différents objets de la théorie des nombres; J. reine angew. Math. 40 (1850), 261-315

[10] JONES, B.W., The arithmetic theory of quadratic forms; Carus Math. Monographs No. 10, Wiley (1950)

[11] KOECHER, M., Beiträge zu einer Reduktionstheorie in Positivitätsbereichen I; Math. Ann. 141 (1960), 384-432

[12_1] KORKINE, A., ZOLOTAREFF, G., Sur les formes quadratiques; Math. Ann. 6 (1873), 366-389

[12_2] - - - - - - - - - - - - - - -, Sur les formes quadratiques positives; Math. Ann. 11 (1877), 242-292

[13] MINKOWSKI, H.; Diskontinuitätsbereich für arithmetische Äquivalenz; J. reine angew. Math. 129 (1905), 220-274

[14] SIEGEL, C.L., Lectures on advanced analytic number theory, Tata Inst. Lectures 23, Bombay 1961

[15] STAFFELDT, R.E., Reduction theory and K_3 of the gaussian integers; Duke Math. J. 46, No 4 (1979), 773-798

[16] VORONOI, G., Sur quelques propriétés des formes quadratiques positives parfaites; J. reine angew. Math. 133 (1908), 97 -178

Lebenslauf

Am 2. Oktober 1939 wurde ich als zweites Kind des Landwirtschaftsrats Dr. Wilhelm Leinigen und seiner Ehefrau Gertrud, geb. Pölzing, in Heilbronn geboren.

Von 1945 bis 1949 besuchte ich die Volksschule in Herrenberg und von September 1949 bis März 1955 das Schickhardt-Progymnasium in Herrenberg.

Von Oktober 1955 bis September 1957 wurde ich am Institut für Organische Chemie der Technischen Hochschule Stuttgart zur chemisch-technischen Assistentin ausgebildet und war an diesem Institut bis November 1960 berufstätig.

Nach meiner Heirat Ende des Jahres 1960 war ich Hausfrau mit zwei Kindern.

Anfang des Jahres 1971 trat ich in das Hessenkolleg Frankfurt ein, das ich bis Sommer 1973 besuchte und mit der Allgemeinen Hochschulreife abschloß.

Ab Wintersemester 1973/74 studierte ich Mathematik und Chemie an der Johann Wolfgang Goethe-Universität in Frankfurt; im November 1977 bestand ich dort die wissenschaftliche Prüfung für das Lehramt an Gymnasien (erstes Staatsexamen).

Im Frühjahr 1978 begann ich in Frankfurt den Vorbereitungsdienst für das Lehramt an Gymnasien und bestand im Oktober 1979 das zweite Staatsexamen.
Ab Februar 1980 war ich in Frankfurt Gymnasiallehrerin i.A. und ab August 1980 Studienrätin z.A..

Um mehr Zeit für wissenschaftliches Arbeiten zu haben, ersuchte ich im Winter 1980/81 um meine Entlassung aus dem Schuldienst.

Während des Studiums war ich am Fachbereich Mathematik der Johann Wolfgang Goethe-Universität vier Semester lang als wissenschaftliche Hilfskraft beschäftigt.
Im Wintersemester 1978/79 war ich Lehrbeauftragte des obigen

Fachbereich für die Vorleseung 'Lineare Algebra und Analytische Geometrie II'.
Seit 1. Februar 1981 bin ich dort als wissenschaftliche Mitarbeiterin tätig.

Ich besuchte Vorlesungen der Professoren N. Barth, F.W. Bauer, H. Behr, R. Bieri, H.D. Brauer, G. Burde, H. Heydtmann, E. Jouhy, H. Kessler, R. Kulze, K. Lingelbach, W. Metzler, M. Reichert, W. Ried, H. Roesky, C.P. Schnorr, H.W. Schuster, W. Schwarz, F. Stummel und M. Wilk.

Heidrun Ong